

Les représentations ℓ -adiques associées aux courbes elliptiques sur \mathbb{Q}_p

Maja Volkov

1^{er} février 2008

Résumé

This paper is devoted to the study of the ℓ -adic representations of the absolute Galois group G of \mathbb{Q}_p , $p \geq 5$, associated to an elliptic curve over \mathbb{Q}_p , as ℓ runs through the set of all prime numbers (including $\ell = p$, in which case we use the theory of potentially semi-stable p -adic representations).

For each prime ℓ , we give the complete list of isomorphism classes of $\mathbb{Q}_\ell[G]$ -modules coming from an elliptic curve over \mathbb{Q}_p , that is, those which are isomorphic to the Tate module of an elliptic curve over \mathbb{Q}_p . The $\ell = p$ case is the more delicate. It requires studying the liftings of a given elliptic curve over \mathbb{F}_p to an elliptic scheme over the ring of integers of a totally ramified finite extension of \mathbb{Q}_p , and combining it with a descent theorem providing a Galois criterion for an elliptic curve having good reduction over a p -adic field to be defined over a closed subfield. This enables us to state necessary and sufficient conditions for an ℓ -adic representation of G to come from an elliptic curve over \mathbb{Q}_p , for each prime ℓ .

1991 *Mathematics Subject Classification*. Primary 14F20 ; Secondary 11G07, 14F30.

L'objet de cet article est l'étude des représentations ℓ -adiques associées aux courbes elliptiques définies sur \mathbb{Q}_p , où p est un nombre premier supérieur ou égal à 5, lorsque ℓ parcourt l'ensemble de tous les nombres premiers, y compris $\ell = p$.

Fixons un premier $p \geq 5$ et une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_p$ de \mathbb{Q}_p . Soit E une courbe elliptique sur \mathbb{Q}_p . Pour tout ℓ premier, soit $E[\ell^n]$, $n \geq 0$, le groupe des points de ℓ^n -torsion de E à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$. Le module de Tate ℓ -adique $T_\ell(E) = \varprojlim E[\ell^n]$ est un \mathbb{Z}_ℓ -module libre de rang 2, $V_\ell(E) = \mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} T_\ell(E)$ est un \mathbb{Q}_ℓ -espace vectoriel de dimension 2, et tous deux sont munis d'une action linéaire et continue du groupe de Galois absolu $G = \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$. On obtient ainsi des représentations pour tout ℓ

$$G \longrightarrow \text{Aut}_{\mathbb{Z}_\ell}(T_\ell(E)) \quad \text{et} \quad G \longrightarrow \text{Aut}_{\mathbb{Q}_\ell}(V_\ell(E))$$

Ces représentations contiennent des informations concernant la courbe E/\mathbb{Q}_p et beaucoup de résultats sur celles-ci sont devenus classiques (voir [Se 1], [Se 2], [Se-Ta], [Ta], [Kr], [Ro], et bien d'autres).

Soit maintenant T_ℓ un \mathbb{Z}_ℓ -module libre de rang 2 muni d'une action linéaire et continue de G . On considère le problème suivant : quand T_ℓ provient-il d'une courbe elliptique sur \mathbb{Q}_p , i.e. quand existe-t-il une courbe elliptique E/\mathbb{Q}_p telle que T_ℓ et $T_\ell(E)$ sont des $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -modules isomorphes ? En fait, cette question se ramène à celle obtenue en remplaçant T_ℓ par $\mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} T_\ell$

et $T_\ell(E)$ par $V_\ell(E)$. On donne ici une réponse à cette question, y compris dans le cas $\ell = p$, qui est le plus délicat à traiter.

L'objet de la section 1 est de présenter les outils utilisés. Pour $\ell \neq p$, à chaque représentation ℓ -adique de G , on sait associer fonctoriellement une représentation de Weil-Deligne - sur laquelle les racines du polynôme caractéristique d'un relèvement du Frobenius sont des unités ℓ -adiques - et vice versa (voir une définition ici en 1.1 ; il est important de noter que la construction que nous allons utiliser est contravariante). Une représentation de Weil-Deligne consiste en la donnée d'une représentation du groupe de Weil et d'un opérateur nilpotent, les deux étant liés par une relation. Travailler avec de tels objets présente l'avantage de discrétiser l'action de G . Pour $\ell = p$, à chaque représentation p -adique de G potentiellement semi-stable, on sait associer fonctoriellement un (φ, N, G) -module filtré (voir 1.2 ; ici encore nous allons utiliser un foncteur contravariant), et réciproquement si ce module filtré est faiblement admissible (i.e. faiblement admissible équivaut à admissible, voir [Co-Fo]). Un (φ, N, G) -module filtré consiste en la donnée d'un espace vectoriel muni d'un opérateur de Frobenius φ semi-linéaire, d'un opérateur nilpotent N lié à φ par une relation, d'une action semi-linéaire de G commutant avec ces deux opérateurs, ainsi que d'une filtration stable par l'action de G ; la faible admissibilité est une condition liant le Frobenius à la filtration. Travailler avec de tels objets présente l'avantage de pouvoir remplacer une représentation p -adique de G par des données de type algébrique. De plus, en oubliant la filtration, on sait associer fonctoriellement à chaque (φ, N, G) -module filtré une représentation de Weil-Deligne définie sur une extension non ramifiée de \mathbb{Q}_p ; via cette association, les classes d'isomorphisme des (φ, N, G) -modules (non filtrés) correspondent bijectivement à celles des représentations de Weil-Deligne. Cela permet de comparer les représentations ℓ -adiques entre elles pour tout ℓ premier. En particulier, on sait que, pour une courbe elliptique E/\mathbb{Q}_p fixée, les représentations de Weil-Deligne qui lui sont associées sont indépendantes du nombre premier ℓ . Ainsi, répondre à la question pour $\ell \neq p$, c'est savoir quelles sont exactement les représentations de Weil-Deligne possibles ; et pour $\ell = p$, c'est savoir quelles sont exactement les filtrations faiblement admissibles possibles.

Donnons des conditions nécessaires bien connues. Soit E/\mathbb{Q}_p une courbe elliptique.

1) Pour tout ℓ premier, la représentation de Weil-Deligne associée à $V_\ell(E)$ vérifie :

- (1°) le déterminant sur $V_\ell(E)$ est le caractère cyclotomique ℓ -adique
- (2°) elle est définie sur \mathbb{Q}
- (3°) si E a potentiellement bonne réduction, les racines du polynôme caractéristique d'un relèvement du Frobenius géométrique sont des p -nombres de Weil : $\text{Tr}(\text{Frob}) \in \mathbb{Z}$ et $|\text{Tr}(\text{Frob})|_\infty \leq 2\sqrt{p}$

2) Le $\mathbb{Q}_p[G]$ -module $V_p(E)$ est potentiellement semi-stable et de type Hodge-Tate $(0, 1)$.

En fait, on a un but double : d'une part, classifier pour tout ℓ les représentations ℓ -adiques associées à une courbe elliptique sur \mathbb{Q}_p ; d'autre part, faire la liste pour tout ℓ de toutes les représentations ℓ -adiques, à isomorphisme près, vérifiant ces conditions nécessaires et déterminer celles qui proviennent d'une courbe elliptique sur \mathbb{Q}_p .

La première partie est l'objet de la section 2 ; signalons que les résultats énoncés dans cette section sont tous plus ou moins connus. On commence par construire une liste finie de représentations de Weil-Deligne deux à deux non isomorphes, liste que nous notons **WD*** (2.1.1). À chacune d'elles, on associe un (φ, N, G) -module et on construit un représentant de

chaque classe d'isomorphisme de filtration faiblement admissible de type Hodge-Tate $(0, 1)$ que l'on peut mettre sur ce module ; il y a, suivant les cas, un nombre fini ou infini de possibilités. Cela nous donne une liste infinie de (φ, N, G) -modules filtrés faiblement admissibles deux à deux non isomorphes que nous notons \mathbf{D}^* (2.2.1). Puis on montre que si E est une courbe elliptique sur \mathbb{Q}_p , alors, pour $\ell \neq p$, la représentation de Weil-Deligne associée à $V_\ell(E)$ est isomorphe à un objet de la liste \mathbf{WD}^* (2.1.3), et le (φ, N, G) -module filtré associé à $V_p(E)$ est isomorphe à un objet de la liste \mathbf{D}^* (2.2.4). De plus, si l'on se donne la courbe E sous la forme d'une équation de Weierstrass $y^2 = x^3 + Ax + B$, on donne une liste d'invariants de E définis à partir de A et de B qui permettent de déterminer l'objet de \mathbf{WD}^* associé et parfois aussi de \mathbf{D}^* .

La deuxième partie est l'objet des sections 3, 4 et 5. Les résultats principaux sont les deux théorèmes suivants :

Théorème 1 (cf. thm. 3.1 ci-dessous) *Soient $\ell \neq p$ et V_ℓ une représentation ℓ -adique de G de dimension 2. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1) *il existe une courbe elliptique E sur \mathbb{Q}_p telle que $V_\ell(E)$ soit isomorphe à V_ℓ ,*
- (2) *la représentation de Weil-Deligne associée à V_ℓ vérifie les conditions (1°) , (2°) et (3°) ci-dessus,*
- (3) *la représentation de Weil-Deligne associée à V_ℓ est isomorphe à un objet de la liste \mathbf{WD}^* .*

Théorème 2 (cf. thm. 5.1 ci-dessous) *Soit V_p une représentation p -adique de G de dimension 2. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1) *il existe une courbe elliptique E sur \mathbb{Q}_p telle que $V_p(E)$ soit isomorphe à V_p ,*
- (2) *la représentation V_p est potentiellement semi-stable de type Hodge-Tate $(0, 1)$ et la représentation de Weil-Deligne associée vérifie les conditions (1°) , (2°) et (3°) ci-dessus,*
- (3) *la représentation V_p est potentiellement semi-stable et le (φ, N, G) -module filtré associé est isomorphe à un objet de la liste \mathbf{D}^* .*

Le théorème 1 est facile à démontrer (3.1). En effet, en utilisant la théorie de Honda-Tate pour les cas de potentielle bonne réduction, les opérations élémentaires sur les courbes elliptiques permettent de construire suffisamment d'exemples pour obtenir toutes les classes ; on peut même produire pour chacune un exemple sous forme d'équation de Weierstrass (3.2).

Le théorème 2 est plus délicat et constitue le principal résultat nouveau de cet article. Lorsque la représentation est potentiellement semi-stable mais non potentiellement cristalline on peut faire des calculs suffisamment explicites, grâce aux courbes de Tate ; on obtient une infinité de classes paramétrées par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}_p$. Les cas cristallins ou tordus-cristallins engendrent une famille finie de classes, de même pour les cas potentiellement ordinaires ; on peut donner des exemples sous forme d'équations de Weierstrass (5.2). La principale difficulté se trouve dans les cas potentiellement supersinguliers qui ne sont pas des tordus de cas cristallins, ce qui arrive lorsque 12 ne divise pas $p - 1$; alors pour chaque entier dans $\{3, 4, 6\}$ divisant $p + 1$ on obtient une infinité de classes paramétrées par $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$.

Pour traiter ce dernier cas on construit dans la section 4 toutes les courbes elliptiques sur \mathbb{Q}_p ayant potentiellement bonne réduction supersingulière, à \mathbb{Q}_p -isomorphisme près, de la manière qui suit. Dans un premier temps, étant donnée une courbe elliptique \tilde{E} sur \mathbb{F}_p supersingulière, on décrit en 4.2 les schémas elliptiques la relevant sur l'anneau des entiers d'une extension totalement ramifiée dont l'indice de ramification est un entier e strictement

inférieur à $p - 1$ (la réponse à ce problème est bien connue quand \tilde{E} est ordinaire, cf. [Me] ou [Ka]). Pour cela on combine le théorème de Serre-Tate (4.1.1) avec la description des groupes p -divisibles par les modules de Dieudonné filtrés (4.1.2 et 4.1.3). Puis on démontre en 4.3 un théorème de descente qui fournit un critère galoisien pour qu’une courbe elliptique ayant bonne réduction sur un corps p -adique puisse être définie sur un sous-corps fermé. Ce critère permet de déterminer quels sont, parmi les schémas elliptiques construits en 4.2 et pour $e \in \{3, 4, 6\}$, ceux qui sont susceptibles d’être définis sur \mathbb{Q}_p (4.4). En 4.5 on donne les résultats de ces méthodes appliquées aux cas ordinaires. On récolte finalement les fruits de cette étude en 5.1 où l’on démontre le théorème 2 énoncé ci-dessus.

Cet article est une version remaniée de la thèse de l’auteur sous la direction de J.-M. Fontaine. Au cours de ce travail l’auteur a bénéficié de précieuses discussions avec lui.

Je tiens donc à remercier chaleureusement J.-M. Fontaine, sans ses patientes explications ce travail n’aurait certainement pas pu être mené à bien.

Table des matières

1	Rappels et notations	5
1.1	Représentations ℓ -adiques, $\ell \neq p$, et représentations de Weil-Deligne	5
1.2	Représentations p -adiques potentiellement semi-stables et (φ, N, G) -modules filtrés	6
1.3	Notations	8
1.3.1	Quelques invariants de courbes elliptiques sur \mathbb{Q}_p	8
1.3.2	Notations galoisiennes	10
2	Classification des $\mathbb{Q}_\ell[G]$-modules $V_\ell(E)$	10
2.1	Les cas $\ell \neq p$	10
2.1.1	La liste WD*	10
2.1.2	Description des twists quadratiques	11
2.1.3	Classification	12
2.2	Le cas $\ell = p$	12
2.2.1	La liste D*	12
2.2.2	Description des twists quadratiques	13
2.2.3	L’image de Galois dans $\text{Aut}_{\mathbb{Q}_p}(V)$	14
2.2.4	Classification	14
3	Les $\mathbb{Q}_\ell[G]$-modules provenant d’une courbe elliptique sur \mathbb{Q}_p, $\ell \neq p$	16
3.1	Résultat et conséquence	16
3.2	Exemples	18
3.2.1	Courbes elliptiques potentiellement ordinaires	18
3.2.2	Courbes elliptiques potentiellement supersingulières	18
4	Construction de courbes potentiellement supersingulières	19
4.1	Préliminaires	19
4.1.1	Le foncteur de Serre-Tate	19
4.1.2	Modules de Dieudonné	20
4.1.3	Modules de Dieudonné filtrés	20

4.2	Schémas elliptiques supersinguliers	21
4.3	Un critère galoisien de descente	23
4.4	Courbes potentiellement supersingulières	26
4.5	Sur les cas ordinaires	28
5	Les $\mathbb{Q}_p[G]$-modules provenant d'une courbe elliptique sur \mathbb{Q}_p	29
5.1	Résultat et conséquences	29
5.2	Exemples	31
5.2.1	Courbes elliptiques potentiellement ordinaires	31
5.2.2	Courbes elliptiques potentiellement supersingulières	32
	Références	33

1 Rappels et notations

Soit \mathcal{P} l'ensemble des nombres premiers. On fixe un $p \in \mathcal{P}$ tel que $p \geq 5$ et $\overline{\mathbb{Q}_p}$ une clôture algébrique de \mathbb{Q}_p . On note $G = \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ et I son sous-groupe d'inertie ; si $K \subset \overline{\mathbb{Q}_p}$ est une extension de \mathbb{Q}_p on pose $G_K = \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/K)$ et $I_K = G_K \cap I$. On note \mathbb{Q}_p^{nr} l'extension maximale non ramifiée de \mathbb{Q}_p contenue dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$ et $\overline{\mathbb{F}_p}$ son corps résiduel. Pour $\ell \in \mathcal{P}$, si $\mu_{\ell^n}(\overline{\mathbb{Q}_p})$ est le groupe des racines ℓ^n -ièmes de l'unité contenues dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$, on écrit $\mathbb{Z}_\ell(1) = \varprojlim \mu_{\ell^n}(\overline{\mathbb{Q}_p})$ et $\mathbb{Q}_\ell(1) = \mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Z}_\ell(1)$. La valuation p -adique v_p sur \mathbb{Q}_p est normalisée par $v_p(p) = 1$; on note aussi v_p la valuation qui l'étend sur $\overline{\mathbb{Q}_p}$.

1.1 Représentations ℓ -adiques, $\ell \neq p$, et représentations de Weil-Deligne

Soit $\ell \in \mathcal{P}$ tel que $\ell \neq p$. On désigne par $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(G)$ la catégorie des représentations ℓ -adiques de G , c'est-à-dire des \mathbb{Q}_ℓ -espaces vectoriels de dimension finie munis d'une action linéaire et continue de G . Soit $L \subset \overline{\mathbb{Q}_p}$ une extension finie de \mathbb{Q}_p ; une représentation ℓ -adique de G est semi-stable sur L si I_L opère de façon unipotente et a bonne réduction sur L si I_L opère trivialement. Le corps résiduel de \mathbb{Q}_ℓ étant fini, on sait que toutes les représentations ℓ -adiques de G sont potentiellement semi-stables.

Le groupe de Weil W de \mathbb{Q}_p est défini par la suite exacte courte $1 \rightarrow I \rightarrow W \xrightarrow{v} \mathbb{Z} \rightarrow 1$ avec $v(\text{Frob. arithm.}) = 1$; c'est donc le sous-groupe de G constitué des éléments g tels que $g \bmod I$ est une puissance entière du Frobenius.

Soit K un corps de caractéristique 0. On note $\mathbf{Rep}_K('W)$ la catégorie des représentations K -linéaires du groupe de Weil-Deligne $'W$: les objets sont les triplets (Δ, ρ_0, N) , où Δ est un K -espace vectoriel de dimension finie, $\rho_0 : W \rightarrow \text{Aut}_K(\Delta)$ est un morphisme dont le noyau contient un sous-groupe ouvert de I , et $N \in \text{End}_K(\Delta)$ vérifie $\rho_0(w)N = p^{v(w)}N\rho_0(w)$ pour tout $w \in W$; l'opérateur de monodromie N est donc nilpotent. Soit $L \subset \overline{\mathbb{Q}_p}$ une extension finie de \mathbb{Q}_p ; la représentation (Δ, ρ_0, N) est semi-stable sur L si $\rho_0(I_L) = 1$ et a bonne réduction sur L si $N = 0$ et $\rho_0(I_L) = 1$. Si l'action de $'W$ est F -semi-simple, i.e. si l'action de W par ρ_0 est semi-simple, alors un objet de $\mathbf{Rep}_K('W)$ est déterminé à isomorphisme près par les traces $\text{Tr}(\rho_0) : W \rightarrow K$ ainsi que par le polynôme minimal de N .

Soient K et K' deux corps de caractéristique 0 munis de plongements $\iota : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ et $\iota' : K' \hookrightarrow \mathbb{C}$ et soient Δ, Δ' des objets de $\mathbf{Rep}_K('W)$ et $\mathbf{Rep}_{K'}('W)$ respectivement. On dit que Δ est défini sur \mathbb{Q} si, étant donné un \mathbb{Q} -espace vectoriel D tel que $\Delta = K \otimes_{\mathbb{Q}} D$ et un

corps algébriquement clos Ω contenant K , l'objet $\Omega \otimes_{\mathbb{Q}} D$ de $\mathbf{Rep}_{\Omega}('W)$ est isomorphe à ses conjugués sous $\mathrm{Aut}(\Omega/\mathbb{Q})$ (cette condition est indépendante des choix de D et de Ω) ; dans ce cas $\Delta \otimes_{K \nearrow \iota} \mathbb{C}$ est un objet de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{C}}('W)$ dont la classe d'isomorphisme ne dépend pas du choix de ι . On dit que Δ et Δ' sont compatibles s'ils sont tous deux définis sur \mathbb{Q} et si $\Delta \otimes_{K \nearrow \iota} \mathbb{C}$ et $\Delta' \otimes_{K' \nearrow \iota'} \mathbb{C}$ sont isomorphes dans $\mathbf{Rep}_{\mathbb{C}}('W)$.

Soit $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_{\ell}}^{\circ}('W)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_{\ell}}('W)$ formée des objets sur lesquels les racines du polynôme caractéristique d'un relèvement du Frobenius sont des unités ℓ -adiques. Il existe un foncteur établissant une équivalence entre $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_{\ell}}^{\circ}('W)$ et $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_{\ell}}(G)$, voir [Ro], § 4 ou [De 1], § 8.

On renvoie à [Fo 3] pour la définition de l'anneau $B_{st,\ell}$. On utilise ici le foncteur contravariant $\mathbf{W}_{\ell}^* : \mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_{\ell}}(G) \rightarrow \mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_{\ell}}^{\circ}('W)$ donné par $\mathbf{W}_{\ell}^*(V) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_{\ell}[I_L]}(V, B_{st,\ell})$ si V est semi-stable sur l'extension finie $L \subset \overline{\mathbb{Q}_p}$ de \mathbb{Q}_p ; si V a bonne réduction sur L on a $\mathbf{W}_{\ell}^*(V) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_{\ell}[I_L]}(V, \mathbb{Q}_{\ell})$. Ce foncteur est équivalent à celui obtenu en appliquant le foncteur décrit dans [Fo 3] à la représentation duale. Il établit une anti-équivalence de catégories via laquelle les notions d'objet semi-stable sur L ou ayant bonne réduction sur L se correspondent. Comme $V_{\ell}(E)$ est le dual de $H_{\text{ét}}^1(E \times_{\mathbb{Q}_p} \overline{\mathbb{Q}_p}, \mathbb{Q}_{\ell})$ pour une courbe elliptique E/\mathbb{Q}_p , on peut voir \mathbf{W}_{ℓ}^* comme un foncteur covariant des $H_{\text{ét}}^1$ dans $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_{\ell}}^{\circ}('W)$.

Choisissons pour chaque $\ell \neq p$ un plongement de corps $\iota_{\ell} : \mathbb{Q}_{\ell} \hookrightarrow \mathbb{C}$. Un système $(\Delta_{\ell})_{\ell \neq p}$ de représentations \mathbb{Q}_{ℓ} -linéaires de $'W$ est compatible si les Δ_{ℓ} sont deux à deux compatibles lorsque ℓ parcourt $\mathcal{P} \setminus \{p\}$. Sur chaque Δ_{ℓ} il existe une unique filtration finie croissante $\{\mathrm{Fil}_i \Delta_{\ell}\}_{i \in \mathbb{Z}}$ telle que $N(\mathrm{Fil}_i \Delta_{\ell}) \subset \mathrm{Fil}_{i-2} \Delta_{\ell}$ et que N induit un isomorphisme $N^i : \mathrm{Gr}_i \Delta_{\ell} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gr}_{-i} \Delta_{\ell}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$ ([De 2]). Supposons que chaque Δ_{ℓ} est F -semi-simple ; alors la compatibilité signifie que, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, les traces $\mathrm{Tr}(\mathrm{Gr}_i \Delta_{\ell}) : W \rightarrow \mathbb{Q}_{\ell}$ sont à valeurs dans \mathbb{Q} et indépendantes de ℓ . Si $N = 0$ sur tous les Δ_{ℓ} cela signifie que les traces $\mathrm{Tr}(\rho_{0,\ell}) : W \rightarrow \mathbb{Q}_{\ell}$ sont à valeurs dans \mathbb{Q} et indépendantes de ℓ .

Soit E/\mathbb{Q}_p une courbe elliptique. Pour tout $\ell \neq p$, si $L \subset \overline{\mathbb{Q}_p}$ est une extension finie de \mathbb{Q}_p , alors E est semi-stable sur L (resp. a bonne réduction sur L) si et seulement si la représentation de Weil-Deligne $\mathbf{W}_{\ell}^*(V_{\ell}(E))$ associée à $V_{\ell}(E)$ l'est. De plus, on sait que $\mathbf{W}_{\ell}^*(V_{\ell}(E))$ est F -semi-simple, définie sur \mathbb{Q} , et que le système $(\mathbf{W}_{\ell}^*(V_{\ell}(E)))_{\ell \neq p}$ est compatible (voir [Ra] pour un énoncé dans un contexte bien plus général ; voir aussi la rmq. 2.6).

1.2 Représentations p -adiques potentiellement semi-stables et (φ, N, G) -modules filtrés

On désigne par $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G)$ la catégorie des représentations p -adiques de G , c'est-à-dire des \mathbb{Q}_p -espaces vectoriels de dimension finie munis d'une action linéaire et continue de G . Pour pouvoir disposer de notions similaires à celles du cas $\ell \neq p$, on a besoin de la théorie de Fontaine (voir [Fo 2]), en particulier des anneaux B_{dR} , B_{cris} et B_{st} ; on renvoie à [Fo 1] pour les définitions de ceux-ci.

Soient $L \subset \overline{\mathbb{Q}_p}$ une extension finie de \mathbb{Q}_p et L_0 l'extension maximale non ramifiée contenue dans L ; alors $(B_{cris})^{G_L} = (B_{st})^{G_L} = L_0$. Donc, si V est une représentation p -adique de G , les objets $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p[G_L]}(V, B_{st})$ et $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p[G_L]}(V, B_{cris})$ sont des L_0 -espaces vectoriels ; on montre que leur dimension est toujours inférieure ou égale à $\dim_{\mathbb{Q}_p}(V)$. On dit que V est semi-stable sur L si $\dim_{L_0}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p[G_L]}(V, B_{st})) = \dim_{\mathbb{Q}_p}(V)$ et que V est cristalline sur L si $\dim_{L_0}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p[G_L]}(V, B_{cris})) = \dim_{\mathbb{Q}_p}(V)$. On note $\mathbf{Rep}_{cris}(G)$, $\mathbf{Rep}_{st}(G)$, $\mathbf{Rep}_{cris,L}(G)$,

$\mathbf{Rep}_{st,L}(G)$, $\mathbf{Rep}_{pcris}(G)$ et $\mathbf{Rep}_{pst}(G)$ les sous-catégories pleines de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G)$ constituées des objets qui sont respectivement cristallins sur \mathbb{Q}_p , semi-stables sur \mathbb{Q}_p , cristallins sur L , semi-stables sur L , potentiellement cristallins et potentiellement semi-stables.

Soient $K \subset \overline{\mathbb{Q}_p}$ une extension galoisienne de \mathbb{Q}_p de groupe de Galois G_{K/\mathbb{Q}_p} et K_0 l'extension maximale non ramifiée contenue dans K ; le Frobenius absolu σ agit sur K_0 . La catégorie des $(\varphi, N, G_{K/\mathbb{Q}_p})$ -modules filtrés est définie de la manière suivante :

- les objets sont des K_0 -espaces vectoriels D munis :

- (i) d'une action σ -semi-linéaire de G_{K/\mathbb{Q}_p} (le sous-groupe d'inertie agit linéairement)
- (ii) d'un Frobenius $\varphi : D \rightarrow D$, injectif, σ -semi-linéaire et G_{K/\mathbb{Q}_p} -équivariant
- (iii) d'un endomorphisme K_0 -linéaire G_{K/\mathbb{Q}_p} -équivariant $N : D \rightarrow D$ tel que $N\varphi = p\varphi N$
- (iv) d'une filtration indexée par \mathbb{Z} , décroissante, exhaustive et séparée sur $D_K = K \otimes_{K_0} D$ par des sous- K -espaces vectoriels $\{\mathrm{Fil}^i D_K, i \in \mathbb{Z}\}$ stables par G_{K/\mathbb{Q}_p} , l'action de G_{K/\mathbb{Q}_p} étant étendue semi-linéairement sur D_K

- un morphisme $f : D_1 \rightarrow D_2$ est une application K_0 -linéaire commutant à l'action de G_{K/\mathbb{Q}_p} , à φ et à N , et telle que, si l'on note f_K l'application K -linéaire déduite de f par extension des scalaires, $f_K(\mathrm{Fil}^i D_{1,K}) \subset \mathrm{Fil}^i D_{2,K}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

On désigne par $\mathbf{MF}_{K/\mathbb{Q}_p}(\varphi, N)$ la sous-catégorie pleine des $(\varphi, N, G_{K/\mathbb{Q}_p})$ -modules filtrés formée des objets sur lesquels l'action de G_{K/\mathbb{Q}_p} est discrète et qui sont de dimension finie en tant que K_0 -espace vectoriel ; le Frobenius φ est alors bijectif et l'opérateur de monodromie N est nilpotent. C'est une catégorie \mathbb{Q}_p -linéaire mais non abélienne, qui est munie d'un produit tensoriel ([Fo 2], 4.3.4) ; un sous-objet est un sous- $(\varphi, N, G_{K/\mathbb{Q}_p})$ -module muni de la filtration induite. On note $\mathbf{MF}_{K/\mathbb{Q}_p}(\varphi)$ la sous-catégorie pleine formée des objets sur lesquels $N = 0$; si $K = \mathbb{Q}_p$ on écrit $\mathbf{MF}_{\mathbb{Q}_p}(\varphi, N)$ et $\mathbf{MF}_{\mathbb{Q}_p}(\varphi)$.

Soit D un objet de dimension d dans $\mathbf{MF}_{K/\mathbb{Q}_p}(\varphi, N)$. On pose $t_H(D) = t_H(\wedge^d D) = \max\{i \in \mathbb{Z} / \mathrm{Fil}^i(\wedge^d D_K) \neq 0\}$ et $t_N(D) = v_p(\lambda)$, où $\lambda \in K_0$ est tel que $\varphi x = \lambda x$ pour un x non nul de $\wedge^d D$. On dit que D est faiblement admissible si $t_H(D) = t_N(D)$ et $t_H(D') \leq t_N(D')$ pour tout sous-objet D' de D ([Fo 2], 4.4.1). Un objet de $\mathbf{MF}_{K/\mathbb{Q}_p}(\varphi, N)$ est faiblement admissible si et seulement si l'objet de $\mathbf{MF}_K(\varphi, N)$ obtenu en oubliant l'action de G_{K/\mathbb{Q}_p} l'est ([Fo 2], prop.4.4.9). On note $\mathbf{MF}_{K/\mathbb{Q}_p}^{fa}(\varphi, N)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{MF}_{K/\mathbb{Q}_p}(\varphi, N)$ formée des objets faiblement admissibles ; définition similaire pour $\mathbf{MF}_{K/\mathbb{Q}_p}^{fa}(\varphi)$.

Le type de Hodge-Tate d'un objet D de dimension 2 de $\mathbf{MF}_{K/\mathbb{Q}_p}(\varphi, N)$ est le couple d'entiers (r, s) tel que $\mathrm{Fil}^i D_K = D_K \Leftrightarrow i \leq r$ et $\mathrm{Fil}^i D_K = 0 \Leftrightarrow i > s$.

L'anneau B_{st} est un (φ, N, G) -module filtré que l'on peut construire à partir de B_{cris} de la manière suivante (pour l'influence de ce choix voir [Fo 2], 5.2). Soit $\pi = (\pi^{(n)}) \in (\overline{\mathbb{Q}_p})^{\mathbb{N}}$ tel que $\pi^{(0)} = p$ et $(\pi^{(n+1)})^p = \pi^{(n)}$, et soit $\mathbf{u} = \log([\pi]/p) \in B_{dR}$; alors on prend $B_{st} = B_{cris}[\mathbf{u}] \subset B_{dR}$ sur lequel le Frobenius est étendu par $\varphi \mathbf{u} = p\mathbf{u}$ et N est l'unique B_{cris} -dérivation telle que $N\mathbf{u} = 1$. Les foncteurs contravariants

$$\mathbf{D}_{cris,K/\mathbb{Q}_p}^* : \mathbf{Rep}_{cris,K}(G) \rightarrow \mathbf{MF}_{K/\mathbb{Q}_p}^{fa}(\varphi) \quad \text{et} \quad \mathbf{D}_{st,K/\mathbb{Q}_p}^* : \mathbf{Rep}_{st,K}(G) \rightarrow \mathbf{MF}_{K/\mathbb{Q}_p}^{fa}(\varphi, N)$$

donnés par $\mathbf{D}_{cris,K/\mathbb{Q}_p}^*(V) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(V, B_{cris})$ et $\mathbf{D}_{st,K/\mathbb{Q}_p}^*(V) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(V, B_{st})$ établissent une anti-équivalence de catégories ([Fo 2] et [Co-Fo]). Les quasi-inverses sont donnés par $\mathbf{V}_{st,K/\mathbb{Q}_p}^*(D) = \mathrm{Hom}_{(\varphi, N, G)-mf}(D, B_{st})$ et $\mathbf{V}_{cris,K/\mathbb{Q}_p}^*(D) = \mathrm{Hom}_{(\varphi, G)-mf}(D, B_{cris})$, où l'indice “ mf ” signifie “modules filtrés”, G opérant sur D via son quotient G_{K/\mathbb{Q}_p} .

Si $K = \mathbb{Q}_p$ on écrit \mathbf{D}_{cris}^* et \mathbf{D}_{st}^* . On note \mathbf{D}_{pcris}^* et \mathbf{D}_{pst}^* les foncteurs obtenus comme limite inductive des $\mathbf{D}_{cris,K/\mathbb{Q}_p}^*$ et $\mathbf{D}_{st,K/\mathbb{Q}_p}^*$ lorsque K parcourt l'ensemble des extensions finies galoisiennes de \mathbb{Q}_p contenues dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$; ce sont des foncteurs de $\mathbf{Rep}_{pcris}(G)$ et $\mathbf{Rep}_{pst}(G)$ dans la limite inductive des $\mathbf{MF}_{K/\mathbb{Q}_p}(\varphi, N)$.

Enfin, on a un foncteur $\mathbf{WD}_{K/\mathbb{Q}_p} : \mathbf{MF}_{K/\mathbb{Q}_p}(\varphi, N) \rightarrow \mathbf{Rep}_{K_0}('W)$ obtenu en oubliant la filtration et en faisant agir le groupe de Weil K_0 -linéairement ([Fo 3]) : si D est un objet de $\mathbf{MF}_{K/\mathbb{Q}_p}(\varphi, N)$ et si $D^{(0)}$ est le $(\varphi, N, G_{K/\mathbb{Q}_p})$ -module obtenu en oubliant la filtration, alors $\mathbf{WD}_{K/\mathbb{Q}_p}(D)$ s'identifie au K_0 -espace vectoriel $D^{(0)}$ muni de l'opérateur N avec $\rho_0(w) = (w \bmod W_K) \cdot \varphi^{-v(w)}$ pour tout $w \in W$, où W_K est le groupe de Weil relatif à K . Si D_1 et D_2 sont des objets de $\mathbf{MF}_{K/\mathbb{Q}_p}(\varphi, N)$ on a un isomorphisme

$$K_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{Hom}_{(\varphi, N, G_{K/\mathbb{Q}_p})-mod}(D_1^{(0)}, D_2^{(0)}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Rep}_{K_0}('W)}(\mathbf{WD}_{K/\mathbb{Q}_p}(D_1), \mathbf{WD}_{K/\mathbb{Q}_p}(D_2))$$

de sorte que les classes d'isomorphisme de $(\varphi, N, G_{K/\mathbb{Q}_p})$ -modules sont en bijection avec celles de $\mathbf{Rep}_{K_0}('W)$. En composant avec $\mathbf{D}_{st,K/\mathbb{Q}_p}^*$ on obtient un foncteur $\mathbf{W}_p^* : \mathbf{Rep}_{st,K}(G) \rightarrow \mathbf{Rep}_{K_0}('W)$; si V est un objet de $\mathbf{Rep}_{st,K}(G)$ on dira que $\mathbf{W}_p^*(V)$ est la représentation de Weil-Deligne associée à V .

Posons $\mathbb{Q}'_\ell = \mathbb{Q}_\ell$ si $\ell \neq p$, $\mathbb{Q}'_p = K_0$, et choisissons des plongements de corps $\iota_\ell : \mathbb{Q}'_\ell \hookrightarrow \mathbb{C}$ pour tout $\ell \in \mathcal{P}$. Un système $(\Delta_\ell)_{\ell \in \mathcal{P}}$ de représentations \mathbb{Q}'_ℓ -linéaires de $'W$ est compatible si les Δ_ℓ sont deux à deux compatibles lorsque ℓ parcourt \mathcal{P} . On a alors les mêmes notions et critères que pour les systèmes $(\Delta_\ell)_{\ell \neq p}$ en remplaçant à chaque fois " $\ell \neq p$ " par " $\ell \in \mathcal{P}$ ".

Soit E/\mathbb{Q}_p une courbe elliptique. La représentation $V_p(E)$ est potentiellement semi-stable; si $L \subset \overline{\mathbb{Q}_p}$ est une extension finie de \mathbb{Q}_p , alors E est semi-stable sur L si et seulement si $V_p(E)$ l'est et E a bonne réduction sur L si et seulement si $V_p(E)$ est cristalline sur L . De plus, si K est la clôture galoisienne d'un corps sur lequel E devient semi-stable, on sait que $D = \mathbf{D}_{st,K/\mathbb{Q}_p}^*(V_p(E))$ est de type Hodge-Tate $(0, 1)$, i.e. $\mathrm{Fil}^i(D_K) = D_K$ pour $i \leq 0$, $\mathrm{Fil}^1(D_K)$ est une K -droite et $\mathrm{Fil}^i(D_K) = 0$ pour $i \geq 2$. Enfin, on sait que la représentation de Weil-Deligne $\mathbf{W}_p^*(V_p(E))$ associée à $V_p(E)$ est F -semi-simple, définie sur \mathbb{Q} , et que le système $(\mathbf{W}_\ell^*(V_\ell(E)))_{\ell \in \mathcal{P}}$ est compatible (cf. [C-D-T] prop. B.4.2. pour les cas de potentielle bonne réduction; sinon, la présence d'un opérateur de monodromie non nul rend ces assertions faciles à vérifier).

1.3 Notations

1.3.1 Quelques invariants de courbes elliptiques sur \mathbb{Q}_p

Pour tout ce qui concerne les courbes elliptiques on peut se référer aux livres de J.H. Silverman [Si 1] et [Si 2].

Soit E une courbe elliptique sur \mathbb{Q}_p , i.e. une variété abélienne sur \mathbb{Q}_p de dimension relative 1. Elle admet un modèle sous forme de cubique plane, dit modèle de Weierstrass, qui est donné par une équation de la forme

$$E : y^2 = x^3 + Ax + B \quad \text{avec} \quad A, B \in \mathbb{Q}_p \quad \text{et} \quad 4A^3 + 27B^2 \neq 0$$

On dispose d'abord d'un invariant $j_E = j(E) = 1728 \frac{4A^3}{4A^3 + 27B^2}$ (avec $1728 = 12^3$), dit invariant modulaire de E ; il caractérise la classe d'isomorphisme de E sur $\overline{\mathbb{Q}_p}$. Le discriminant de E est

$\Delta_E = -16(4A^3 + 27B^2) \neq 0$, et l'on a $j_E = -12^3(4A)^3 \Delta_E^{-1}$; le quotient $\Delta_E \bmod (\mathbb{Q}_p^\times)^{12}$ est un invariant de la classe d'isomorphisme de E sur \mathbb{Q}_p . Le modèle de Weierstrass est minimal si $A, B \in \mathbb{Z}_p$ et $0 \leq v_p(\Delta_E) < 12$; on peut toujours se ramener à un tel modèle pour E .

On note $E(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ le groupe des points de E à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ et $E[m]$ son sous-groupe de m -torsion, pour tout entier $m \geq 1$.

Si $v_p(j_E) < 0$ alors E a potentiellement réduction multiplicative déployée : il existe un unique $q = q(j_E) \in p\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ vérifiant

$$j_E = \frac{1}{q} + 744 + 196844q + \dots$$

tel que E est la tordue par un caractère d'ordre 1 ou 2 d'une courbe de Tate E_q ; cette torsion correspond à l'extension $\mathbb{Q}_p(\sqrt{\gamma_E})/\mathbb{Q}_p$ où $\gamma_E = -2AB^{-1} \bmod (\mathbb{Q}_p^\times)^2$ ([Si 2], V, lemme 5.2).

Le groupe $E_q(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ est isomorphe, en tant que groupe analytique rigide, à $\overline{\mathbb{Q}}_p^\times/q^\mathbb{Z}$. Pour tout $\ell \in \mathcal{P}$, on a une suite exacte courte de $\mathbb{Q}_\ell[G]$ -modules (voir [Se 1], A.1.2.)

$$(*_m) \quad 0 \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell(1) \longrightarrow V_\ell(E_q) \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell \longrightarrow 0$$

où l'indice “ m ” signifie “multiplicatif”.

Si $v_p(j_E) \geq 0$, alors E a potentiellement bonne réduction : elle acquiert bonne réduction sur une extension finie de \mathbb{Q}_p . Le *défaut de semi-stabilité* de E est l'indice de ramification minimal d'un corps sur lequel elle acquiert bonne réduction ; on le note $\text{dst}(E)$. On a

$$\text{dst}(E) = \frac{12}{\text{pgcd}(12, v_p(\Delta_E))}$$

Si l'on choisit une équation de Weierstrass minimale pour E , alors $0 \leq v_p(\Delta_E) < 12$ et $v_p(j_E) \geq 0$ impliquent que $v_p(\Delta_E)$ n'est pas premier à 12 ; on voit donc que $\text{dst}(E) = e = 1, 2, 3, 4$, ou 6 suivant que $v_p(\Delta_E) = 0$, $v_p(\Delta_E) = 6$, $v_p(\Delta_E) \in \{4, 8\}$, $v_p(\Delta_E) \in \{3, 9\}$, ou $v_p(\Delta_E) \in \{2, 10\}$ respectivement. Les entiers e qui interviennent sont ceux qui vérifient $\varphi(e) \in \{1, 2\}$ où φ est la fonction arithmétique d'Euler.

Comme $p \geq 5$, l'entier $e = \text{dst}(E)$ est premier à p et E acquiert bonne réduction sur une extension totalement ramifiée L de \mathbb{Q}_p de degré e ; on note alors \tilde{E}_L/\mathbb{F}_p la fibre spéciale du modèle de Néron de $E \times_{\mathbb{Q}_p} L$ et $a_p(\tilde{E}_L) = a_p(E)$ la trace du polynôme caractéristique du Frobenius arithmétique agissant sur $V_\ell(\tilde{E}_L)$, $\ell \neq p$. On sait que $a_p(\tilde{E}_L)$ est un entier rationnel indépendant de ℓ tel que $|a_p(\tilde{E}_L)|_\infty \leq 2\sqrt{p}$ et qu'il caractérise la classe d'isogénie sur \mathbb{F}_p de \tilde{E}_L ([Ta]) ; on a la relation

$$a_p(\tilde{E}_L) = p + 1 - \#\tilde{E}_L(\mathbb{F}_p)$$

De plus, la courbe \tilde{E}_L est ordinaire si p ne divise pas $a_p(\tilde{E}_L)$; supersingulière si p divise $a_p(\tilde{E}_L)$, ce qui équivaut à $a_p(\tilde{E}_L) = 0$.

Si O_K (resp. k) est l'anneau des entiers d'une extension K de \mathbb{Q}_p contenue dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ (resp. une extension de \mathbb{F}_p contenue dans $\overline{\mathbb{F}}_p$), on a un foncteur $\mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}(p)$ (resp. $\tilde{E} \mapsto \tilde{E}(p)$) de la catégorie des schémas elliptiques sur O_K (resp. des courbes elliptiques sur k) dans celle des groupes p -divisibles sur O_K (resp. sur k). Si E/K est une courbe elliptique ayant bonne réduction sur K , on note $E(p)$ le groupe p -divisible sur O_K du modèle de Néron de E .

Si E acquiert bonne réduction ordinaire sur L , la partie connexe $E_L(p)^0$ de $E_L(p)$ est de hauteur 1, et l'on a une suite exacte de groupes p -divisibles sur l'anneau des entiers de L

$$0 \longrightarrow E_L(p)^0 \longrightarrow E_L(p) \longrightarrow \tilde{E}_L(p) \longrightarrow 0$$

qui induit la suite exacte courte de $\mathbb{Q}_p[G]$ -modules

$$(*_{ord}) \quad 0 \longrightarrow V_p(E_L(p)^0) \longrightarrow V_p(E) \longrightarrow V_p(\tilde{E}_L) \longrightarrow 0$$

1.3.2 Notations galoisiennes

On note \mathbb{Q}_{p^2} l'extension non ramifiée de degré 2 de \mathbb{Q}_p . On choisit $\pi_{12} \in \overline{\mathbb{Q}_p}$ vérifiant $(\pi_{12})^{12} + p = 0$ et $\zeta_{12} \in \overline{\mathbb{Q}_p}$ une racine primitive 12-ième de l'unité. Pour tout entier $e \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ on pose $\pi_e = (\pi_{12})^{12/e}$ et $\zeta_e = (\zeta_{12})^{12/e}$.

On considère pour tout $e \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ le corps $L_e = \mathbb{Q}_p(\pi_e)$: c'est une extension totalement ramifiée de degré e de \mathbb{Q}_p ; l'entier e étant premier à p , cette extension est modérément ramifiée. On note K_e la clôture galoisienne de L_e dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$, $G_{K_e/\mathbb{Q}_p} = \text{Gal}(K_e/\mathbb{Q}_p)$ et $I_e = I_{K_e}$. Comme $(\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})^\times$ est d'ordre 1 ou 2, on a $p \equiv 1 \pmod{e\mathbb{Z}}$ ou bien $p \equiv -1 \pmod{e\mathbb{Z}}$. On se trouve alors dans l'une des situations suivantes :

$K_1 = \mathbb{Q}_p$ et $G_{K_1/\mathbb{Q}_p} = 1$; $K_2 = \mathbb{Q}_p(\pi_2)$ et $G_{K_2/\mathbb{Q}_p} = \langle \tau_2 \rangle$, où τ_2 est défini par $\tau_2 \pi_2 = -\pi_2$; si $e \in \{3, 4, 6\}$ et $e \mid p-1$, $K_e = \mathbb{Q}_p(\pi_e)$ et $G_{K_e/\mathbb{Q}_p} = \langle \tau_e \rangle$, où τ_e est défini par $\tau_e \pi_e = \zeta_e \pi_e$; si $e \in \{3, 4, 6\}$ et $e \mid p+1$, $K_e = \mathbb{Q}_{p^2}(\pi_e) = \mathbb{Q}_p(\pi_e, \zeta_e)$ et $G_{K_e/\mathbb{Q}_p} = \langle \tau_e \rangle \rtimes \langle \omega \rangle$, où τ_e est défini par $\tau_e \pi_e = \zeta_e \pi_e$, $\tau_e \zeta_e = \zeta_e$, et ω est le relèvement du Frobenius absolu qui fixe π_e et tel que $\omega \zeta_e = \zeta_e^{-1}$; on a $\omega \tau_e = \tau_e^{-1} \omega$.

Il y a 3 extensions quadratiques de \mathbb{Q}_p , une non ramifiée et deux totalement ramifiées. On les note $M_1 = \mathbb{Q}_{p^2}$, $M_2 = \mathbb{Q}_p(\pi_2)$ et M_3 .

On pose $\mathcal{N}_p = \{a \in \mathbb{Z} \mid |a|_\infty \leq 2\sqrt{p}\}$. L'ensemble $\mathcal{N}_p^\times \subset \mathbb{Z} \cap \mathbb{Z}_p^\times$ des éléments non nuls de \mathcal{N}_p est de cardinal $2[2\sqrt{p}]$ (partie entière).

On pose $\gamma_e = \zeta_e + \zeta_e^{-1} = -1, 0, 1$ pour $e = 3, 4, 6$ respectivement, i.e. $X^2 - \gamma_e X + 1$ est le e -ième polynôme cyclotomique.

Quand $e \in \{3, 4, 6\}$ et $e \mid p-1$, on note $\mathcal{N}_{p,e}^\times$ l'ensemble des $a \in \mathbb{Z}$ tels que $(\gamma_e^2 - 4)(a^2 - 4p)$ est un carré dans \mathbb{Q} ; c'est un sous-ensemble de \mathcal{N}_p^\times . Si $a \in \mathcal{N}_{p,e}^\times$ le polynôme $X^2 - aX + p$ est scindé dans $\mathbb{Z}_p[X]$ et il existe un unique $u_a \in \mathbb{Z}_p^\times$ tel que $a = u_a + u_a^{-1}p$; alors on a $\mathcal{N}_{p,e}^\times = \{\pm(u_a \zeta_e^i + u_a^{-1} p \zeta_e^{-i}), i \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}\}$. L'ensemble $\mathcal{N}_{p,3}^\times = \mathcal{N}_{p,6}^\times = \{a \in \mathbb{Z} \mid a^2 - 4p \equiv -3 \pmod{(\mathbb{Q}^\times)^2}\}$ est de cardinal 6 et l'ensemble $\mathcal{N}_{p,4}^\times = \{a \in \mathbb{Z} \mid a^2 - 4p \equiv -1 \pmod{(\mathbb{Q}^\times)^2}\}$ est de cardinal 4. Par exemple :

$\mathcal{N}_{5,4}^\times = \{\pm 2, \pm 4\} \subset \mathcal{N}_5^\times = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4\}$; $\mathcal{N}_{7,3}^\times = \{\pm 1, \pm 4, \pm 5\} \subset \mathcal{N}_7^\times = \{\pm 1, \dots, \pm 5\}$; $\mathcal{N}_{13,3}^\times = \{\pm 2, \pm 5, \pm 7\}$ et $\mathcal{N}_{13,4}^\times = \{\pm 4, \pm 6\} \subset \mathcal{N}_{13}^\times = \{\pm 1, \dots, \pm 7\}$.

2 Classification des $\mathbb{Q}_\ell[G]$ -modules $V_\ell(E)$

2.1 Les cas $\ell \neq p$

2.1.1 La liste WD*

Soit $\phi \in W$ un relèvement du Frobenius géométrique modulo $I(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p(\pi_{12}))$: ϕ agit trivialement sur L_e pour tout $e \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ et $\phi \pmod{I_e}$ agit par $x \mapsto x^{1/p}$ sur $\overline{\mathbb{F}_p}$. Pour

$e \in \{2, 3, 4, 6\}$ on note θ_e un relèvement dans I de $\tau_e \in I/I_e = I(K_e/\mathbb{Q}_p)$.

Soient $a \in \mathbb{Z}_p^\times$ et $u_a \in \mathbb{Z}_p^\times$ tels que $X^2 - aX + p = (X - u_a)(X - u_a^{-1}p)$. Si $e \in \{3, 4, 6\}$ divise $p - 1$ on pose pour $\epsilon \in \{\pm 1\}$

$$t_\epsilon = t_\epsilon(a, e) = u_a \zeta_e^\epsilon + u_a^{-1} p \zeta_e^{-\epsilon} \in \mathbb{Z}_p^\times$$

On a $(X - t_1)(X - t_{-1}) = X^2 - \gamma_e a X + p \gamma_e^2 + a^2 - 4p = T(X)$ et $t_1 \neq t_{-1}$. La condition $a \in \mathcal{N}_{p,e}^\times$ signifie exactement que les racines de $T(X)$ sont dans \mathbb{Z} ; elles sont alors dans $\mathcal{N}_{p,e}^\times$.

Soit F un corps de caractéristique 0. La liste **WD*** suivante définit à isomorphisme près des objets de $\mathbf{Rep}_F('W)$ de dimension deux, qui sont dans $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}^\circ('W)$ lorsque $F = \mathbb{Q}_\ell$:

WD_m^{*}(e; b), $e \in \{1, 2\}$, $b \in \{-1, 1\}$:

$$\rho_0(I_2) = 1; \rho_0(\theta_2) = (-1)^{e-1}; P_{\min}(\rho_0(\phi)) = (X - b)(X - bp); P_{\min}(N) = X^2; \rho_0(\phi)N = p^{-1}N\rho_0(\phi).$$

WD_c^{*}(e; a_p), $e \in \{1, 2\}$, $a_p \in \mathcal{N}_p$:

$$\rho_0(I_2) = 1; \rho_0(\theta_2) = (-1)^{e-1}; P_{\min}(\rho_0(\phi)) = X^2 - a_p X + p; N = 0.$$

WD_{pc}^{*}(e; a_p; ε), $e \in \{3, 4, 6\}$ et $e \mid p - 1$, $a_p \in \mathcal{N}_{p,e}^\times$, $\epsilon \in \{-1, 1\}$:

$$\rho_0(I_e) = 1; P_{\min}(\rho_0(\theta_e)) = X^2 - \gamma_e X + 1; P_{\min}(\rho_0(\phi)) = X^2 - a_p X + p; P_{\min}(\rho_0(\phi)\rho_0(\theta_e)) = X^2 - t_\epsilon X + p; \rho_0(\phi)\rho_0(\theta_e) = \rho_0(\theta_e)\rho_0(\phi); N = 0.$$

WD_{pc}^{*}(e; 0), $e \in \{3, 4, 6\}$ et $e \mid p + 1$:

$$\rho_0(I_e) = 1; P_{\min}(\rho_0(\theta_e)) = X^2 - \gamma_e X + 1; P_{\min}(\rho_0(\phi)) = X^2 + p; \rho_0(\phi)\rho_0(\theta_e) = \rho_0(\theta_e)^{-1}\rho_0(\phi); N = 0.$$

Remarque 2.1 Les classes d'isomorphisme de ces objets ne dépendent pas du choix des corps K_e : si dans la description de l'un d'eux on remplace K_e par une autre extension galoisienne de \mathbb{Q}_p d'indice de ramification e , on obtient un objet isomorphe.

Tous les objets Δ de la liste **WD*** sont définis sur \mathbb{Q} . De plus, la représentation F -linéaire de $'W$ de dimension un $\wedge^2 \Delta$ est donnée par : $\wedge^2 \rho_0(I) = 1$, $\wedge^2 \rho_0(\phi) = p$, $\wedge^2 N = 0$; si $F = \mathbb{Q}_\ell$ l'objet obtenu en appliquant le foncteur quasi-inverse est $\mathbb{Q}_\ell(1)$.

Les objets du type **WD_m^{*}** sont des tordus d'objets semi-stables sur \mathbb{Q}_p mais n'ont pas potentiellement bonne réduction. Les objets du type **WD_c^{*}** sont des tordus d'objets ayant bonne réduction sur \mathbb{Q}_p . Les objets du type **WD_{pc}^{*}** ont potentiellement bonne réduction mais ne sont pas des tordus d'objets ayant bonne réduction sur \mathbb{Q}_p .

2.1.2 Description des twists quadratiques

La liste **WD*** est stable par twists quadratiques. En tordant un objet Δ de **WD*** par l'un des caractères quadratiques on obtient les objets Δ_1 , Δ_2 et Δ_3 correspondant respectivement aux extensions M_1 , M_2 et M_3 . En faisant varier Δ parmi les objets de la liste on obtient :

$$\begin{aligned} \Delta &= \mathbf{WD}_m^*(1; \mathbf{b}); \Delta_1 = \mathbf{WD}_m^*(1; -\mathbf{b}); \Delta_2 = \mathbf{WD}_m^*(2; \mathbf{b}); \Delta_3 = \mathbf{WD}_m^*(2; -\mathbf{b}) \\ \Delta &= \mathbf{WD}_c^*(1; \mathbf{a}_p); \Delta_1 = \mathbf{WD}_c^*(1; -\mathbf{a}_p); \Delta_2 = \mathbf{WD}_c^*(2; \mathbf{a}_p); \Delta_3 = \mathbf{WD}_c^*(2; -\mathbf{a}_p) \\ \Delta &= \mathbf{WD}_{pc}^*(4; \mathbf{a}_p; \epsilon); \Delta_1 = \mathbf{WD}_{pc}^*(4; -\mathbf{a}_p; \epsilon); \Delta_2 = \mathbf{WD}_{pc}^*(4; \mathbf{a}_p; -\epsilon); \Delta_3 = \mathbf{WD}_{pc}^*(4; -\mathbf{a}_p; -\epsilon) \\ \Delta &= \mathbf{WD}_{pc}^*(3; \mathbf{a}_p; \epsilon); \Delta_1 = \mathbf{WD}_{pc}^*(3; -\mathbf{a}_p; \epsilon); \Delta_2 = \mathbf{WD}_{pc}^*(6; \mathbf{a}_p; -\epsilon); \Delta_3 = \mathbf{WD}_{pc}^*(6; -\mathbf{a}_p; -\epsilon) \\ \Delta &= \mathbf{WD}_{pc}^*(4; 0) = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 \\ \Delta &= \mathbf{WD}_{pc}^*(3; 0) = \Delta_1; \Delta_2 = \mathbf{WD}_{pc}^*(6; 0) = \Delta_3 \end{aligned}$$

Si un objet Δ de la liste **WD*** provient d'une courbe elliptique E/\mathbb{Q}_p alors les Δ_i , $i \in \{1, 2, 3\}$, proviennent des courbes elliptiques E_i/\mathbb{Q}_p obtenues en tordant E sur M_i .

2.1.3 Classification

Proposition 2.2 Soit $\ell \in \mathcal{P}$ tel que $\ell \neq p$. Les représentations de la liste \mathbf{WD}^* sont deux à deux non isomorphes. Si E est une courbe elliptique sur \mathbb{Q}_p alors $\mathbf{W}_\ell^*(V_\ell(E))$ est isomorphe à l'un des objets de la liste \mathbf{WD}^* .

Preuve. Soit E/\mathbb{Q}_p une courbe elliptique et soit $(\Delta_\ell, \rho_0, N) = \mathbf{W}_\ell^*(V_\ell(E))$.

Supposons $v_p(j_E) < 0$. Si E est une courbe de Tate alors $\Delta_\ell \simeq \mathbf{WD}_m^*(\mathbf{1}; \mathbf{1})$, et en tordant par les trois caractères quadratiques (cf. 2.1.2), on obtient les $\mathbf{WD}_m^*(\mathbf{e}; \mathbf{b})$, voir [Ro], § 15.

Supposons $v_p(j_E) \geq 0$. Alors E acquiert bonne réduction sur L_e avec $e = \text{dst}(E)$ et l'on a $N = 0$, $\rho_0(I_e) = 1$ et $P_{\min}(\rho_0(\phi))(X) = X^2 - a_p X + p$ avec $a_p = a_p(\tilde{E}_{L_e}) \in \mathcal{N}_p$. La minimalité de e implique que $\rho_0 \bmod I_e :< \tau_e > = I/I_e \hookrightarrow \text{Aut}_{\mathbb{Q}_\ell}(\Delta_\ell)$ est injective.

Si $e \in \{1, 2\}$ alors $\Delta_\ell \simeq \mathbf{WD}_c^*(\mathbf{e}; \mathbf{a}_p)$. Supposons $e \in \{3, 4, 6\}$, d'où $(\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})^\times = \{\pm 1\}$. Alors $P_{\min}(\rho_0(\theta_e))(X) = (X - \zeta_e)(X - \zeta_e^{-1}) = X^2 - \gamma_e X + 1$, puisque $\rho_0(\theta_e)$ est d'ordre e et de déterminant 1. Comme $\theta_e \phi \equiv \phi \theta_e^p \bmod I_e$, on a $\rho_0(\phi)\rho_0(\theta_e) = \rho_0(\theta_e)\rho_0(\phi)$ si $p \equiv 1 \bmod e\mathbb{Z}$ et $\rho_0(\phi)\rho_0(\theta_e) = \rho_0(\theta_e)^{-1}\rho_0(\phi)$ si $p \equiv -1 \bmod e\mathbb{Z}$.

Si $e \mid p+1$, en se plaçant dans $\mathbb{Q}_\ell(\zeta_e) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \Delta_\ell$ on voit que $\text{Tr}(\rho_0(\phi)) = a_p = \text{Tr}(\rho_0(\phi\theta_e)) = 0$ et \tilde{E}_{L_e} est supersingulière. Dans ce cas la donnée de $\text{Tr}(\rho_0(\theta_e))$ et $\text{Tr}(\rho_0(\phi))$ suffit pour déterminer la classe de Δ_ℓ , qui correspond à $\mathbf{WD}_{pc}^*(\mathbf{e}; \mathbf{0})$.

Si $e \mid p-1$ la représentation est abélienne, donc sa classe est déterminée par la donnée de $\text{Tr}(\rho_0(\phi))$, $\text{Tr}(\rho_0(\theta_e))$ et $\text{Tr}(\rho_0(\phi\theta_e))$. Prenons une $\mathbb{Q}_\ell(\zeta_e)$ -base de $\mathbb{Q}_\ell(\zeta_e) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \Delta_\ell$ dans laquelle la matrice de $\rho_0(\theta_e)$ s'écrit $\text{Diag}(\zeta_e^\epsilon, \zeta_e^{-\epsilon})$ avec $\epsilon \in \{\pm 1\}$ et celle de $\rho_0(\phi)$ s'écrit $\text{Diag}(z_1, z_2)$. Alors $\text{Tr}(\rho_0(\phi\theta_e)) = t_\epsilon = \zeta_e^\epsilon z_1 + \zeta_e^{-\epsilon} z_2$ est racine de $T(X) = X^2 - \gamma_e a_p X + p\gamma_e^2 + a_p^2 - 4p$ dont le discriminant est $(a_p^2 - 4p)(\gamma_e^2 - 4) \neq 0$. Le fait que Δ_ℓ est définie sur \mathbb{Q} implique $t_\epsilon \in \mathbb{Q}$ ce qui équivaut à $a_p \in \mathcal{N}_{p,e}^\times$; en particulier $a_p \neq 0$ et \tilde{E}_{L_e} est ordinaire. Finalement $\Delta_\ell \simeq \mathbf{WD}_{pc}^*(\mathbf{e}; \mathbf{a}_p; \epsilon)$. \square

Remarque 2.3 Soit E/\mathbb{Q}_p telle que $v_p(j_E) < 0$, d'où $\mathbf{W}_\ell^*(V_\ell(E)) \simeq \mathbf{WD}_m^*(\mathbf{e}; \mathbf{b})$; soit $\gamma_E \in \mathbb{Q}_p^\times/(\mathbb{Q}_p^\times)^2$ l'invariant défini en 1.3.1. Alors on a : $(e; b) = (1; 1) \Leftrightarrow \mathbb{Q}_p(\sqrt{\gamma_E}) = \mathbb{Q}_p$; $(e; b) = (1; -1) \Leftrightarrow \mathbb{Q}_p(\sqrt{\gamma_E}) = M_1$; $(e; b) = (2; 1) \Leftrightarrow \mathbb{Q}_p(\sqrt{\gamma_E}) = M_2$; $(e; b) = (2; -1) \Leftrightarrow \mathbb{Q}_p(\sqrt{\gamma_E}) = M_3$.

Remarque 2.4 Soit E/\mathbb{Q}_p telle que $v_p(j_E) \geq 0$ et $\text{dst}(E) = e \geq 3$. On voit que si $e \mid p-1$, alors E est potentiellement ordinaire, et si $e \mid p+1$, alors E est potentiellement supersingulière.

Remarque 2.5 Dans la même situation que ci-dessus, on détermine l'invariant $\epsilon \in \{\pm 1\}$ qui intervient lorsque e divise $p-1$ en étudiant le $\mathbb{F}_p[I]$ -module $E[p]$: si l'on prend une équation de Weierstrass minimale pour E alors on a $\epsilon = 1$ si $v_p(\Delta_E) < 6$ (i.e. $v_p(\Delta_E) \in \{2, 3, 4\}$) et $\epsilon = -1$ si $v_p(\Delta_E) > 6$ (i.e. $v_p(\Delta_E) \in \{8, 9, 10\}$) ([Kr], 2.3.1, prop.1).

Remarque 2.6 Finalement, on constate que si l'on se donne une courbe elliptique E/\mathbb{Q}_p sous forme d'équation de Weierstrass, une liste d'invariants de la courbe (explicitement calculables) suffit pour retrouver la classe d'isomorphisme de $V_\ell(E)$, $\ell \neq p$. En particulier, lorsque E/\mathbb{Q}_p est fixée et que ℓ parcourt $\mathcal{P} \setminus \{p\}$, les classes des $V_\ell(E)$ sont indépendantes de ℓ : ceci exprime la compatibilité au sens de Weil-Deligne du système de représentations $(V_\ell(E))_{\ell \neq p}$.

2.2 Le cas $\ell = p$

2.2.1 La liste \mathbf{D}^*

On définit la liste \mathbf{D}^* d'objets de $\mathbf{MF}_{K_e/\mathbb{Q}_p}(\varphi, N)$ et de type Hodge-Tate $(0, 1)$ suivants :

$\mathbf{D}_m^*(\mathbf{e}; \mathbf{b}; \alpha)$, $e \in \{1, 2\}$, $b \in \{-1, 1\}$, $\alpha \in \mathbb{Q}_p$:

Pour $e = 1$: $D = \mathbb{Q}_p e_1 \oplus \mathbb{Q}_p e_2$ avec $\varphi e_1 = b e_1$, $\varphi e_2 = p b e_2$; $N e_1 = 0$, $N e_2 = e_1$; $\text{Fil}^1 D = (\alpha e_1 + e_2) \mathbb{Q}_p$.

Pour $e = 2$: $G_{K_e/\mathbb{Q}_p} = \langle \tau_2 \rangle$, $D = \mathbb{Q}_p e_1 \oplus \mathbb{Q}_p e_2$ avec $\varphi e_1 = b e_1$, $\varphi e_2 = p b e_2$; $N e_1 = 0$, $N e_2 = e_1$; $\tau_2 e_1 = -e_1$, $\tau_2 e_2 = -e_2$; $\text{Fil}^1 D_{K_e} = (\alpha \cdot e_1 \otimes 1 + e_2 \otimes 1) \mathbb{Q}_p(\pi_2)$.

$\mathbf{D}_c^*(\mathbf{e}; \mathbf{a}_p; \alpha)$, $e \in \{1, 2\}$, $a_p \in \mathcal{N}_p^\times$, $\alpha \in \{0, 1\}$:

Soit $u \in \mathbb{Z}_p^\times$ tel que $u + u^{-1}p = a_p$.

Pour $e = 1$: $D = \mathbb{Q}_p e_1 \oplus \mathbb{Q}_p e_2$ avec $\varphi e_1 = u e_1$, $\varphi e_2 = u^{-1} p e_2$; $N e_1 = N e_2 = 0$; $\text{Fil}^1 D = (\alpha e_1 + e_2) \mathbb{Q}_p$.

Pour $e = 2$: $G_{K_e/\mathbb{Q}_p} = \langle \tau_2 \rangle$, $D = \mathbb{Q}_p e_1 \oplus \mathbb{Q}_p e_2$ avec $\varphi e_1 = u e_1$, $\varphi e_2 = u^{-1} p e_2$; $N e_1 = N e_2 = 0$; $\tau_2 e_1 = -e_1$, $\tau_2 e_2 = -e_2$; $\text{Fil}^1 D_{K_e} = (\alpha \cdot e_1 \otimes 1 + e_2 \otimes 1) \mathbb{Q}_p(\pi_2)$.

$\mathbf{D}_c^*(\mathbf{e}; \mathbf{0})$, $e \in \{1, 2\}$:

Pour $e = 1$: $D = \mathbb{Q}_p e_1 \oplus \mathbb{Q}_p e_2$ avec $\varphi e_1 = e_2$, $\varphi e_2 = -p e_1$; $N e_1 = N e_2 = 0$; $\text{Fil}^1 D = e_1 \mathbb{Q}_p$.

Pour $e = 2$: $G_{K_e/\mathbb{Q}_p} = \langle \tau_2 \rangle$, $D = \mathbb{Q}_p e_1 \oplus \mathbb{Q}_p e_2$ avec $\varphi e_1 = e_2$, $\varphi e_2 = -p e_1$; $N e_1 = N e_2 = 0$; $\tau_2 e_1 = -e_1$, $\tau_2 e_2 = -e_2$; $\text{Fil}^1 D_{K_e} = (e_1 \otimes 1) \mathbb{Q}_p(\pi_2)$.

$\mathbf{D}_{pc}^*(\mathbf{e}; \mathbf{a}_p; \epsilon; \alpha)$, $e \in \{3, 4, 6\}$ et $e \mid p-1$, $a_p \in \mathcal{N}_{p,e}^\times$, $\epsilon \in \{-1, 1\}$, $\alpha \in \{0, 1\}$:

Soit $u \in \mathbb{Z}_p^\times$ tel que $u + u^{-1}p = a_p$.

$G_{K_e/\mathbb{Q}_p} = \langle \tau_e \rangle$, $D = \mathbb{Q}_p e_1 \oplus \mathbb{Q}_p e_2$ avec $\varphi e_1 = u e_1$, $\varphi e_2 = u^{-1} p e_2$; $N e_1 = N e_2 = 0$; $\tau_e e_1 = \zeta_e^\epsilon e_1$, $\tau_e e_2 = \zeta_e^{-\epsilon} e_2$; $\text{Fil}^1 D_{K_e} = (\alpha \cdot e_1 \otimes \pi_e^{-\epsilon} + e_2 \otimes \pi_e^\epsilon) \mathbb{Q}_p(\pi_e)$.

$\mathbf{D}_{pc}^*(\mathbf{e}; \mathbf{0}; \alpha)$, $e \in \{3, 4, 6\}$ et $e \mid p+1$, $\alpha \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$:

$G_{K_e/\mathbb{Q}_p} = \langle \tau_e \rangle \rtimes \langle \omega \rangle$, $D = \mathbb{Q}_{p^2} e_1 \oplus \mathbb{Q}_{p^2} e_2$ avec $\varphi e_1 = e_2$, $\varphi e_2 = -p e_1$; $N e_1 = N e_2 = 0$; $\omega e_1 = e_1$, $\omega e_2 = e_2$; $\tau_e e_1 = \zeta_e e_1$, $\tau_e e_2 = \zeta_e^{-1} e_2$; $\text{Fil}^1 D_{K_e} = (\alpha \cdot e_1 \otimes \pi_e^{-1} + e_2 \otimes \pi_e) \mathbb{Q}_{p^2}(\pi_e)$.

La classe d'isomorphisme de ces objets est indépendante du choix fait pour l'extension galoisienne K_e (elle ne dépend que de l'indice de ramification e).

Tous les objets D de la liste \mathbf{D}^* sont faiblement admissibles. Pour chacun d'entre eux la représentation de Weil-Deligne associée est définie sur \mathbb{Q} . De plus, $\wedge^2 D$ est un objet de $\mathbf{MF}_{\mathbb{Q}_p}(\varphi)$ de dimension un décrit par : $\varphi = p$ et $\text{Fil}^1(\wedge^2 D) = \wedge^2 D$, $\text{Fil}^2(\wedge^2 D) = 0$; l'objet obtenu en appliquant le foncteur quasi-inverse est $\mathbb{Q}_p(1)$.

Les objets du type \mathbf{D}_m^* sont des tordus d'objets semi-stables sur \mathbb{Q}_p mais ne sont pas potentiellement cristallins. Les objets du type \mathbf{D}_c^* sont des tordus d'objets cristallins sur \mathbb{Q}_p . Les objets du type \mathbf{D}_{pc}^* sont potentiellement cristallins mais ne sont pas des tordus d'objets cristallins sur \mathbb{Q}_p .

2.2.2 Description des twists quadratiques

La liste \mathbf{D}^* est stable par twists quadratiques. En tordant un objet D de \mathbf{D}^* par l'un des caractères quadratiques on obtient les objets D_1 , D_2 et D_3 correspondant respectivement aux extensions M_1 , M_2 et M_3 . En faisant varier D parmi les objets de la liste on obtient :

$$D = \mathbf{D}_m^*(1; \mathbf{b}; \alpha); D_1 = \mathbf{D}_m^*(1; -\mathbf{b}; \alpha); D_2 = \mathbf{D}_m^*(2; \mathbf{b}; \alpha); D_3 = \mathbf{D}_m^*(2; -\mathbf{b}; \alpha)$$

$$D = \mathbf{D}_c^*(1; \mathbf{a}_p; \alpha); D_1 = \mathbf{D}_c^*(1; -\mathbf{a}_p; \alpha); D_2 = \mathbf{D}_c^*(2; \mathbf{a}_p; \alpha); D_3 = \mathbf{D}_c^*(2; -\mathbf{a}_p; \alpha)$$

$$D = \mathbf{D}_c^*(1; \mathbf{0}); D_1 = D; D_2 = D_3 = \mathbf{D}_c^*(2; \mathbf{0})$$

$$D = \mathbf{D}_{pc}^*(4; \mathbf{a}_p; \epsilon; \alpha); D_1 = \mathbf{D}_{pc}^*(4; -\mathbf{a}_p; \epsilon; \alpha); D_2 = \mathbf{D}_{pc}^*(4; \mathbf{a}_p; -\epsilon; \alpha); D_3 = \mathbf{D}_{pc}^*(4; -\mathbf{a}_p; -\epsilon; \alpha)$$

$$D = \mathbf{D}_{pc}^*(3; \mathbf{a}_p; \epsilon; \alpha); D_1 = \mathbf{D}_{pc}^*(3; -\mathbf{a}_p; \epsilon; \alpha); D_2 = \mathbf{D}_{pc}^*(6; \mathbf{a}_p; -\epsilon; \alpha); D_3 = \mathbf{D}_{pc}^*(6; -\mathbf{a}_p; -\epsilon; \alpha)$$

$$D = \mathbf{D}_{pc}^*(4; \mathbf{0}; \alpha); D_1 = \mathbf{D}_{pc}^*(4; \mathbf{0}; -\alpha); D_2 = \mathbf{D}_{pc}^*(4; \mathbf{0}; \mathbf{p}^2 \alpha^{-1}); D_3 = \mathbf{D}_{pc}^*(4; \mathbf{0}; -\mathbf{p}^2 \alpha^{-1})$$

$$D = \mathbf{D}_{pc}^*(3; \mathbf{0}; \alpha); D_1 = \mathbf{D}_{pc}^*(3; \mathbf{0}; -\alpha); D_2 = \mathbf{D}_{pc}^*(6; \mathbf{0}; \mathbf{p}^2 \alpha^{-1}); D_3 = \mathbf{D}_{pc}^*(6; \mathbf{0}; -\mathbf{p}^2 \alpha^{-1})$$

Si un objet D de \mathbf{D}^* provient d'une courbe elliptique E/\mathbb{Q}_p alors les D_i , $i \in \{1, 2, 3\}$, proviennent des courbes elliptiques E_i/\mathbb{Q}_p obtenues en tordant E sur M_i .

2.2.3 L'image de Galois dans $\text{Aut}_{\mathbb{Q}_p}(V)$

Les objets $\mathbf{D}_{\mathbf{c}}^*(\mathbf{e}; \mathbf{0})$ et $\mathbf{D}_{\mathbf{pc}}^*(\mathbf{e}; \mathbf{0}; \alpha)$ sont irréductibles. Tous les autres objets D de la liste \mathbf{D}^* sont réductibles et il est possible de décrire l'action de G sur le semi-simplifié de $V \simeq \mathbf{V}_{pst}^*(D)$ (à comparer avec le lemme 7.1.3 de [C-D-T]). Soit χ le caractère cyclotomique $G \rightarrow \mathbb{Z}_p^\times$. Pour tout $u \in \mathbb{Z}_p^\times$ on note $\eta_u : G \rightarrow G/I \rightarrow \mathbb{Z}_p^\times$ le caractère non ramifié qui envoie le Frobenius arithmétique sur u . Lorsque $e \geq 2$ et $e \mid p-1$ on note $\xi_e : G \rightarrow G_{K_e/\mathbb{Q}_p} \rightarrow \zeta_e > \subset \mathbb{Z}_p^\times$ le caractère ramifié défini par $\xi_e(g) = g\pi_e/\pi_e$, $g \in G$; on a $\xi_e = [\chi \bmod p\mathbb{Z}_p]_{\frac{p-1}{e}}$, où $[-]$ est le représentant de Teichmüller.

$\mathbf{D}_{\mathbf{m}}^*(\mathbf{e}; \mathbf{b}; \alpha) \simeq \mathbf{D}_{pst}^*(V)$, $e \in \{1, 2\}$, $b \in \{-1, 1\}$, $\alpha \in \mathbb{Q}_p$: il existe une \mathbb{Q}_p -base de V telle que G agit via

$$\begin{pmatrix} \eta_{-1}^{\frac{1-b}{2}} \xi_2^{e-1} \chi & * \\ 0 & \eta_{-1}^{\frac{b-1}{2}} \xi_2^{1-e} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad * \neq 0$$

$\mathbf{D}_{\mathbf{c}}^*(\mathbf{e}; \mathbf{a}_p; \alpha) \simeq \mathbf{D}_{pst}^*(V)$, $e \in \{1, 2\}$, $a_p \in \mathcal{N}_p^\times$, $\alpha \in \{0, 1\}$: soit $u \in \mathbb{Z}_p^\times$ tel que $u + u^{-1}p = a_p$; il existe une \mathbb{Q}_p -base de V telle que G agit via

$$\begin{pmatrix} \eta_u^{-1} \xi_2^{e-1} \chi & * \\ 0 & \eta_u \xi_2^{e-1} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad * = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$$

$\mathbf{D}_{\mathbf{pc}}^*(\mathbf{e}; \mathbf{a}_p; \epsilon; \alpha) \simeq \mathbf{D}_{pst}^*(V)$, $e \in \{3, 4, 6\}$ et $e \mid p-1$, $a_p \in \mathcal{N}_{p,e}^\times$, $\epsilon \in \{-1, 1\}$, $\alpha \in \{0, 1\}$: soit $u \in \mathbb{Z}_p^\times$ tel que $u + u^{-1}p = a_p$; il existe une \mathbb{Q}_p -base de V telle que G agit via

$$\begin{pmatrix} \eta_u^{-1} \xi_e^{-\epsilon} \chi & * \\ 0 & \eta_u \xi_e^\epsilon \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad * = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$$

2.2.4 Classification

Proposition 2.7 *Les objets de la liste \mathbf{D}^* sont deux à deux non isomorphes. Si E est une courbe elliptique sur \mathbb{Q}_p alors $\mathbf{D}_{pst}^*(V_p(E))$ est isomorphe à l'un des objets de la liste \mathbf{D}^* .*

Remarque 2.8 Dans [Fo-Ma], J.-M. Fontaine et B. Mazur classifient les représentations potentiellement semi-stables et faiblement admissibles de G sur un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel de dimension 2. Les objets de dimension 1 sont décrits au § 8, tandis que les objets de dimension 2 qui ne sont pas somme directe d'objets de dimension 1 sont décrits dans la liste du début du § 11. Comme 12 divise $p^2 - 1$ pour $p \geq 5$, les K_e , $e \in \{2, 3, 4, 6\}$, sont des sous-corps du corps noté F_2 dans [Fo-Ma]. Les correspondances dans les notations sont :

$$\mathbf{D}_{\mathbf{m}}^*(\mathbf{1}; \mathbf{b}; \alpha) = D_{II}(0, 1; b, \alpha; 0), \quad b \in \{-1, 1\}, \quad \alpha \in \mathbb{Q}_p$$

$$\mathbf{D}_{\mathbf{c}}^*(\mathbf{e}; \mathbf{a}_p; \mathbf{0}) = U_1 \oplus U_2, \quad e \in \{1, 2\}, \quad a_p \in \mathcal{N}_p^\times : \text{cf. 2.2.3}$$

$$\mathbf{D}_{\mathbf{c}}^*(\mathbf{1}; \mathbf{a}_p; \mathbf{1}) = D_I(0, 1; a_p, p; 0), \quad a_p \in \mathcal{N}_p^\times$$

$$\mathbf{D}_{\mathbf{c}}^*(\mathbf{2}; \mathbf{a}_p; \mathbf{1}) = D_I(0, 1; a_p, p; \frac{p-1}{2}), \quad a_p \in \mathcal{N}_p^\times$$

$$\mathbf{D}_{\mathbf{c}}^*(\mathbf{1}; \mathbf{0}) = D_I(0, 1; 0, p; 0)$$

$$\mathbf{D}_{\mathbf{c}}^*(\mathbf{2}; \mathbf{0}) = D_I(0, 1; 0, p; \frac{p-1}{2})$$

$$\mathbf{D}_{\mathbf{pc}}^*(\mathbf{e}; \mathbf{a}_p; \epsilon; \mathbf{0}) = U_1 \oplus U_2, \quad e \in \{3, 4, 6\}, \quad e \mid p-1, \quad a_p \in \mathcal{N}_{p,e}^\times, \quad \epsilon \in \{\pm 1\} : \text{cf. 2.2.3}$$

$\mathbf{D}_{\mathbf{pc}}^*(\mathbf{e}; \mathbf{a}_p; \epsilon; \mathbf{1}) = D_{III}(0, 1; u, u^{-1}p; \epsilon \frac{p-1}{e}, -\epsilon \frac{p-1}{e})$, $e \in \{3, 4, 6\}$ et $e \mid p-1$, $u \in \mathbb{Z}_p^\times$ tel que $u + u^{-1}p = a_p \in \mathcal{N}_{p,e}^\times$, $\epsilon \in \{\pm 1\}$

$\mathbf{D}_{\mathbf{pc}}^*(\mathbf{e}; \mathbf{0}; \alpha) = D_{IV}(0, 1; p; \frac{p+1}{e} - 1, p - \frac{p+1}{e}; p^{-2}\alpha)$, $e \in \{3, 4, 6\}$ et $e \mid p+1$, $\alpha \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$.

Preuve. Pour E/\mathbb{Q}_p fixée le système $\mathbf{W}_\ell^*(V_\ell(E))_{\ell \in \mathcal{P}}$ étant compatible, la classe d'isomorphisme du (φ, N, G) -module $\mathbf{D}_{pst}^*(V_p(E))^{(0)}$ obtenu en oubliant la filtration est déterminée par celle de $\mathbf{W}_\ell^*(V_\ell(E))$ pour un $\ell \neq p$. Il s'agit donc essentiellement de déterminer quelles sont les filtrations possibles sur ces (φ, N, G) -modules, sachant que l'on veut obtenir des objets faiblement admissibles de type Hodge-Tate $(0, 1)$. On laisse au lecteur le soin de se convaincre que les (φ, N, G) -modules déduits de la liste \mathbf{D}^* correspondent exactement aux objets de la liste \mathbf{WD}^* (via le foncteur $\mathbf{WD}_{K_e/\mathbb{Q}_p}$ décrit en 1.2) et que les filtrations sont bien celles que l'on veut.

Signalons que l'on peut aussi faire des calculs directs, au cas par cas : ce sont les mêmes que ceux effectués dans [Fo-Ma], § A, mais avec des conditions. L'avantage de cette approche est qu'elle permet de retrouver le résultat de compatibilité (i.e. $\mathbf{W}_p^*(V_p(E))$ et $\mathbf{W}_\ell^*(V_\ell(E))$, $\ell \neq p$, sont compatibles). \square

Remarque 2.9 Soit E_q/\mathbb{Q}_p une courbe de Tate. En utilisant la suite exacte $(*_m)$ (cf. 1.3.1) et en faisant des calculs explicites dans B_{st} et B_{dR} , on trouve que $\mathbf{D}_{st}^*(V_p(E_q)) = \mathbf{D}_{\mathbf{m}}^*(\mathbf{1}; \mathbf{1}; \alpha(q))$ avec

$$\alpha(q) = -\frac{\log(u_q)}{v_p(q)} \quad \text{où} \quad q = u_q p^{v_p(q)}, \quad v_p(q) \geq 1$$

(log est le logarithme p -adique). On retrouve ainsi l'invariant noté \mathcal{L} dans [Ma], § 3 (voir aussi [LS], § 9 et [M-T-T]); la différence dans le signe provient du choix fait pour B_{st} , cf. 1.2).

Remarque 2.10 Soient E_q et $E_{q'}$ deux courbes de Tate sur \mathbb{Q}_p . Avec les notations de la remarque précédente, les $\mathbb{Q}_p[G]$ -modules $V_p(E_q)$ et $V_p(E_{q'})$ sont isomorphes si et seulement si $\alpha(q) = \alpha(q')$, i.e. $\log(u_q^{v_p(q')}) = \log(u_{q'}^{v_p(q)})$, ce qui équivaut à $q^{v_p(q')(p-1)} = (q')^{v_p(q)(p-1)}$. On retrouve ainsi le fait que $V_p(E_q)$ et $V_p(E_{q'})$ sont isomorphes si et seulement si les courbes E_q et $E_{q'}$ sont \mathbb{Q}_p -isogènes (cf. [LS], § 9 et [Se 1], A.1.4).

Remarque 2.11 Soit E/\mathbb{Q}_p potentiellement ordinaire, i.e. telle que $\mathbf{D}_{pst}^*(V_p(E)) \simeq \mathbf{D}_{\mathbf{c}}^*(\mathbf{e}; \mathbf{a}_p; \alpha)$ ou $\mathbf{D}_{\mathbf{pc}}^*(\mathbf{e}; \mathbf{a}_p; \epsilon; \alpha)$. La suite exacte $(*_ord)$ (cf. 1.3.1) est scindée si $\alpha = 0$ et non scindée si $\alpha = 1$. Avec les notations utilisées en 2.2.3, cela correspond au fait que le \mathbb{Q}_p -espace vectoriel $\text{Ext}^1(\mathbb{Q}_p(\eta_u \xi_e^\epsilon), \mathbb{Q}_p(\eta_u^{-1} \xi_e^{-\epsilon} \chi)) \simeq H^1(G, \mathbb{Q}_p(\eta_u^{-2} \xi_e^{-2\epsilon} \chi))$ est de dimension un. De plus, on a $\alpha = 0$ si et seulement si $j_E = j(e)$ avec $j(3) = j(6) = 0$ et $j(4) = 1728$, i.e. E_{L_e} est le relèvement canonique de \tilde{E}_{L_e} (cf. 4.5).

Remarque 2.12 Soit E/\mathbb{Q}_p potentiellement supersingulière avec $\text{dst}(E) = e \geq 3$, i.e. telle que $\mathbf{D}_{pst}^*(V_p(E)) \simeq \mathbf{D}_{\mathbf{pc}}^*(\mathbf{e}; \mathbf{0}; \alpha)$. L'invariant α est lié au logarithme du groupe formel (de hauteur 2) de E_{K_e} . D'après les résultats de A. Kraus ([Kr], 2.3.2, prop.2 et lemme 2), les cas $v_p(\alpha) \neq 1$ et $v_p(\alpha) = 1$ correspondent respectivement à $v_p(\tau_p) \geq \frac{p}{p+1}$ et $v_p(\tau_p) < \frac{p}{p+1}$ où τ_p est le p -ième terme de la série formelle donnant la multiplication par p dans ce groupe formel; si l'on choisit une équation minimale pour E , le cas $v_p(\alpha) \geq 2$ correspond à $v_p(\Delta_E) > 6$ (i.e. $v_p(\Delta_E) \in \{8, 9, 10\}$) et le cas $v_p(\alpha) \leq 0$ correspond à $v_p(\Delta_E) < 6$ (i.e. $v_p(\Delta_E) \in \{2, 3, 4\}$). De plus, on a $\alpha \in \{0, \infty\}$ si et seulement si $j_E = j(e)$ avec $j(3) = j(6) = 0$ et $j(4) = 1728$ (cf. 4.4, prop. 4.8).

Remarque 2.13 Étant donné un objet Δ de la liste \mathbf{WD}^* , pour obtenir un objet de la liste \mathbf{D}^* dont la représentation de Weil-Deligne associée est isomorphe sur \mathbb{C} à Δ , on a :

- une infinité de possibilités paramétrées par \mathbb{Q}_p dans les cas $\mathbf{WD}_{\mathbf{m}}^*(\mathbf{e}; \mathbf{b})$
- deux possibilités dans les cas $\mathbf{WD}_{\mathbf{c}}^*(\mathbf{e}; \mathbf{a}_{\mathbf{p}})$, $a_p \neq 0$ et $\mathbf{WD}_{\mathbf{pc}}^*(\mathbf{e}; \mathbf{a}_{\mathbf{p}}; \epsilon)$
- une seule possibilité dans les cas $\mathbf{WD}_{\mathbf{c}}^*(\mathbf{e}; \mathbf{0})$
- une infinité de possibilités paramétrées par $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ dans les cas $\mathbf{WD}_{\mathbf{pc}}^*(\mathbf{e}; \mathbf{0})$.

3 Les $\mathbb{Q}_\ell[G]$ -modules provenant d'une courbe elliptique sur \mathbb{Q}_p , $\ell \neq p$

3.1 Résultat et conséquence

Soit $\ell \neq p$. Nous allons maintenant donner des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une représentation ℓ -adique V_ℓ de G de dimension 2 provienne d'une courbe elliptique sur \mathbb{Q}_p , i.e. pour qu'il existe E/\mathbb{Q}_p telle que $V_\ell \simeq V_\ell(E)$ en tant que $\mathbb{Q}_\ell[G]$ -modules.

Pour E/\mathbb{Q}_p elliptique, on sait que $\mathbf{W}_\ell^*(V_\ell(E))$ est définie sur \mathbb{Q} et que $\wedge^2 V_\ell(E) = \mathbb{Q}_\ell(1)$, i.e. le déterminant sur $V_\ell(E)$ est le caractère cyclotomique ℓ -adique. De plus, si E acquiert bonne réduction sur une extension finie totalement ramifiée L , on sait que $a_p(\tilde{E}_L) \in \mathbb{Z}$ avec $|a_p(\tilde{E}_L)|_\infty \leq 2\sqrt{p}$, i.e. les racines du $P_{\text{car}}(\text{Frob.arithm.}\tilde{E}_L)$ sont des p -nombres de Weil. Cela nous donne trois conditions nécessaires pour qu'une représentation ℓ -adique de G provienne d'une courbe elliptique sur \mathbb{Q}_p . Écrivons-les en termes de conditions sur les représentations de Weil-Deligne associées (i.e. les objets obtenus en appliquant le foncteur \mathbf{W}_ℓ^*). Soit (Δ, ρ_0, N) un objet de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}('W)$ et soit ϕ un relèvement du Frobenius géométrique dans W . On considère les conditions suivantes :

- (1°) $\wedge^2 \Delta$ est donnée par $\wedge^2 \rho_0(I) = 1$, $\wedge^2 \rho_0(\phi) = p$ et $\wedge^2 N = 0$
- (2°) Δ est définie sur \mathbb{Q}
- (3°) Si $N = 0$ on a $\text{Tr}(\rho_0(\phi)) \in \mathbb{Z}$ et $|\text{Tr}(\rho_0(\phi))|_\infty \leq 2\sqrt{p}$.

Maintenant le résultat est que ces conditions nécessaires sont également suffisantes : d'une part les représentations de Weil-Deligne vérifiant les conditions (1°), (2°) et (3°) sont exactement celles de la liste \mathbf{WD}^* , et d'autre part chaque objet de cette liste provient effectivement d'une courbe elliptique sur \mathbb{Q}_p .

Théorème 3.1 *Soient $\ell \neq p$ et V_ℓ une représentation ℓ -adique de G de dimension 2. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1) *il existe une courbe elliptique E sur \mathbb{Q}_p telle que $V_\ell(E)$ soit isomorphe à V_ℓ ,*
- (2) *$\mathbf{W}_\ell^*(V_\ell)$ vérifie les conditions (1°), (2°) et (3°),*
- (3) *$\mathbf{W}_\ell^*(V_\ell)$ est isomorphe à un objet de la liste \mathbf{WD}^* .*

Preuve. Soient ϕ un relèvement dans W du Frobenius géométrique et (Δ, ρ_0, N) un objet de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}('W)$ vérifiant les conditions (1°), (2°) et (3°).

Si $N \neq 0$ les relations $N^2 = 0$ et $N\rho_0(\phi) = p\rho_0(\phi)N$ montrent que $\rho_0(\phi)$ est diagonalisable avec deux valeurs propres distinctes (b, pb) . La condition (1°) donne $b \in \{\pm 1\}$; en particulier, Δ est un objet de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}^\circ('W)$. Le sous-groupe d'inertie I agissant à travers un quotient fini, donc par des racines de l'unité, la relation $N\rho_0(g) = \rho_0(g)N$ pour $g \in I$ implique $\rho_0(g) = \pm 1$. Donc $\Delta \simeq \mathbf{WD}_{\mathbf{m}}^*(\mathbf{e}; \mathbf{b})$. Ces objets proviennent bien d'une courbe elliptique sur \mathbb{Q}_p : il suffit de prendre n'importe quelle courbe de Tate sur \mathbb{Q}_p et si nécessaire de la tordre.

Si $N = 0$ les conditions (1°) et (3°) impliquent que Δ est un objet de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}^\circ('W)$. Soit F le sous-corps de $\overline{\mathbb{Q}_p}$ fixe par le noyau de la restriction de ρ_0 à I : c'est une extension finie galoisienne de \mathbb{Q}_p^{nr} telle que $\rho_0|_I$ induit une injection $\rho_0 : I(F/\mathbb{Q}_p^{nr}) \hookrightarrow \text{Aut}_{\mathbb{Q}_\ell}(\Delta)$.

Soit $\tau \in I(F/\mathbb{Q}_p^{nr})$; la condition (1°) impose $\det(\rho_0(\tau)) = 1$ et la condition (2°) impose $\text{Tr}(\rho_0(\tau)) \in \mathbb{Q}$. Comme $\dim_{\mathbb{Q}_\ell}(\Delta) = 2$ et que $\rho_0(\tau)$ est d'ordre fini, le polynôme minimal de $\rho_0(\tau)$ est le e -ième polynôme cyclotomique avec e tel que $\varphi(e) \in \{1, 2\}$, où φ est la fonction arithmétique d'Euler, c'est-à-dire $e \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$. Donc F/\mathbb{Q}_p^{nr} est modérée, cyclique d'ordre e , et $F = \mathbb{Q}_p^{nr}(\pi_e) = \mathbb{Q}_p^{nr}K_e$, $I(F/\mathbb{Q}_p^{nr}) = I(K_e/\mathbb{Q}_p)$.

Si $e \in \{1, 2\}$, la condition (3°) implique que Δ est isomorphe à l'un des $\mathbf{WD}_c^*(\mathbf{e}; \mathbf{a}_p)$. Ces objets proviennent tous de courbes elliptiques sur \mathbb{Q}_p , puisque, par [Ho-Ta], pour tout $a_p \in \mathcal{N}_p$ il existe \tilde{E}/\mathbb{F}_p telle que $a_p(\tilde{E}) = a_p$ (laquelle se relève en un schéma elliptique sur \mathbb{Z}_p , que l'on tord sur M_2 si $e = 2$).

Si $e \in \{3, 4, 6\}$ et $e \mid p + 1$, alors la trace de $\rho_0(\phi)$ doit être nulle et Δ est isomorphe à $\mathbf{WD}_{\mathbf{pc}}^*(\mathbf{e}; \mathbf{0})$, voir 2.1.3. Si $e \in \{3, 4, 6\}$ et $e \mid p - 1$, alors la condition (2°) implique que la trace de $\rho_0(\phi)$ est dans $\mathcal{N}_{p,e}^\times$ et Δ est isomorphe à l'un des $\mathbf{WD}_{\mathbf{pc}}^*(\mathbf{e}; \mathbf{a}_p; \epsilon)$, voir 2.1.3. Maintenant tous ces cas sont couverts par les exemples donnés en 3.2.2 et 3.2.1 : une fois que l'on dispose du lemme 3.2 qui suit, il s'agit d'un exercice facile sur les courbes elliptiques qui est laissé au lecteur. \square

Pour $u \in \mathbb{F}_p^\times$ et $e \in \{4, 6\}$ on considère les courbes $\tilde{E}_{e,u}/\mathbb{F}_p$ données par les équations $y^2 = f_{e,u}(x)$ avec $f_{4,u}(x) = x^3 + ux$ et $f_{6,u}(x) = x^3 + u$. On a $j(\tilde{E}_{e,u}) = \tilde{j}(e)$ avec $\tilde{j}(4) = 1728$ et $\tilde{j}(6) = 0$, donc $\tilde{E}_{e,u}$ est ordinaire si et seulement si $e \mid p - 1$. Toute courbe sur \mathbb{F}_p d'invariant modulaire $\tilde{j}(e)$ est \mathbb{F}_p -isomorphe à l'une des $\tilde{E}_{e,u}$; de plus, $\tilde{E}_{e,u}$ et $\tilde{E}_{e,u'}$ sont \mathbb{F}_p -isomorphes si et seulement si $u \equiv u' \pmod{(\mathbb{F}_p^\times)^e}$ ([Si 1], X, prop.5.4). On en déduit deux applications

$$\begin{cases} \mathbb{F}_p^\times / (\mathbb{F}_p^\times)^e & \longrightarrow \mathcal{N}_p \\ u \pmod{(\mathbb{F}_p^\times)^e} & \longmapsto a_p(\tilde{E}_{e,u}) \end{cases}$$

de l'ensemble des classes de \mathbb{F}_p -isomorphisme de courbes elliptiques d'invariant modulaire $\tilde{j}(e)$ dans l'ensemble des classes de \mathbb{F}_p -isogénie de courbes elliptiques sur \mathbb{F}_p .

Lemme 3.2 *Si $e \mid p - 1$ l'association $u \mapsto a_p(\tilde{E}_{e,u})$ induit une bijection $\mathbb{F}_p^\times / (\mathbb{F}_p^\times)^e \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}_{p,e}^\times$. En particulier, la classe de \mathbb{F}_p -isogénie d'une courbe elliptique d'invariant modulaire 1728 ou 0 est aussi sa classe de \mathbb{F}_p -isomorphisme.*

Preuve. Si $e \mid p - 1$, les $\tilde{E}_{e,u}$ sont ordinaires, d'où $a_p(\tilde{E}_{e,u}) \in \mathcal{N}_p^\times$, et $\mathbb{F}_p^\times / (\mathbb{F}_p^\times)^e \simeq \mu_e(\mathbb{F}_p)$ est d'ordre e . Le fait que la représentation de Weil-Deligne associée à une tordue convenable d'un relèvement d'invariant modulaire 0 ou 1728 de $\tilde{E}_{e,u}$ sur \mathbb{Q}_p est définie sur \mathbb{Q} implique $a_p(\tilde{E}_{e,u}) \in \mathcal{N}_{p,e}^\times$. Puis on a $a_p(\tilde{E}_{e,u}) \equiv 1 - \#(\tilde{E}_{e,u}(\mathbb{F}_p)) \pmod{p\mathbb{Z}} = c_e u^{\frac{p-1}{e}} =$ coefficient de x^{p-1} dans $f_{e,u}(x)^{\frac{p-1}{2}}$ ([Si 1], V, preuve du thm.4.1(a)). Le coefficient binomial c_e est non nul et $u^{\frac{p-1}{e}}$ parcourt $\mu_e(\mathbb{F}_p)$ lorsque u parcourt \mathbb{F}_p^\times . Comme $\text{Card}(\mathcal{N}_{p,e}^\times) = e$, on en déduit le résultat. \square

Corollaire 3.3 *Soit $\ell \in \mathcal{P}$ tel que $\ell \neq p$. Le nombre de classes d'isomorphisme d'objets de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(G)$ provenant d'une courbe elliptique sur \mathbb{Q}_p est fini et indépendant de ℓ ; il vaut $4[2\sqrt{p}] + \lambda(p)$ où $\lambda(p) = 38, 16, 31$ ou 9 suivant que $p \equiv 1, 5, 7$ ou 11 mod 12.*

Plus précisément, il y a : 4 classes dans $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_\ell}(G)$ provenant de courbes elliptiques sur \mathbb{Q}_p n'ayant pas potentiellement bonne réduction; $\text{Card}(\mathcal{N}_p^\times) = 2[2\sqrt{p}]$ classes provenant de courbes ayant bonne réduction ordinaire sur \mathbb{Q}_p et autant provenant d'un twist quadratique ramifié de telles; 1 classe provenant de courbes ayant bonne réduction supersingulière sur \mathbb{Q}_p et 1 provenant d'un twist quadratique ramifié de telles. Si $3 \mid p - 1$ il y a $2 \text{Card}(\mathcal{N}_{p,3}^\times) = 12$

classes provenant de E/\mathbb{Q}_p potentiellement ordinaires avec $\text{dst}(E) = 3$ et $2 \text{Card}(\mathcal{N}_{p,6}^\times) = 12$ classes provenant de telles courbes avec $\text{dst}(E) = 6$; si $3 \mid p+1$ il y a 1 classe provenant de E/\mathbb{Q}_p potentiellement supersingulières avec $\text{dst}(E) = 3$ et 1 classe provenant de telles courbes avec $\text{dst}(E) = 6$. Si $4 \mid p-1$ il y a $2 \text{Card}(\mathcal{N}_{p,4}^\times) = 8$ classes provenant de E/\mathbb{Q}_p potentiellement ordinaires avec $\text{dst}(E) = 4$; si $4 \mid p+1$ il y a 1 classe provenant de E/\mathbb{Q}_p potentiellement supersingulières avec $\text{dst}(E) = 4$.

Remarque 3.4 Soit E/\mathbb{Q}_p une courbe elliptique et soit T_ℓ un réseau G -stable de $V_\ell(E)$; à homothétie près, on peut supposer que $T_\ell \subset T_\ell(E)$. Alors il existe une courbe elliptique E' et une ℓ -isogénie $\psi : E' \rightarrow E$, définies sur \mathbb{Q}_p , telles que $\psi_\ell(T_\ell(E')) = T_\ell$. Donc, si T_ℓ est un $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -module, pour qu'il existe une courbe elliptique E'/\mathbb{Q}_p telle que $T_\ell \simeq T_\ell(E')$, il faut et il suffit qu'il existe une courbe elliptique E/\mathbb{Q}_p telle que $\mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} T_\ell \simeq V_\ell(E)$.

3.2 Exemples

3.2.1 Courbes elliptiques potentiellement ordinaires

Si $4 \mid p-1$: pour chaque $a_{p,j} \in \mathcal{N}_{p,4}^\times$, $1 \leq j \leq 4$, on choisit un $u_j \in \mathbb{F}_p^\times$ tel que $a_p(\tilde{E}_j) = a_{p,j}$ avec $\tilde{E}_j : y^2 = x^3 + u_j x$; les u_j sont un système de représentants de $\mathbb{F}_p^\times / (\mathbb{F}_p^\times)^4$ (lemme 3.2). Ces courbes sont ordinaires d'invariant modulaire 1728. Par exemple, si $p = 5$, on peut prendre $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = -2$, $u_4 = -1$, ce qui donne $a_{5,1} = 2$, $a_{5,2} = 4$, $a_{5,3} = -4$, $a_{5,4} = -2$. Alors $\{[u_j](-p)^i, 1 \leq j \leq 4, 0 \leq i \leq 3\}$ est un système de représentants de $\mathbb{Q}_p^\times / (\mathbb{Q}_p^\times)^4$, où $[u_j] \in \mathbb{Z}_p^\times$ est le représentant de Teichmüller de u_j .

On pose $E_{i,j} : y^2 = x^3 + [u_j](-p)^i x$ pour $1 \leq j \leq 4$ et $0 \leq i \leq 3$. Ce sont des courbes sur \mathbb{Q}_p d'invariant modulaire 1728 représentant les éléments de $\text{Twist}((E_{0,1}, \mathbf{0}), \mathbb{Q}_p) \simeq \mathbb{Q}_p^\times / (\mathbb{Q}_p^\times)^4$. On a alors pour chaque j :

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_\ell^*(V_\ell(E_{0,j})) &\simeq \mathbf{WD}_c^*(1; \mathbf{a}_{p,j}) & \mathbf{W}_\ell^*(V_\ell(E_{1,j})) &\simeq \mathbf{WD}_{pc}^*(4; \mathbf{a}_{p,j}; 1) \\ \mathbf{W}_\ell^*(V_\ell(E_{2,j})) &\simeq \mathbf{WD}_c^*(2; \mathbf{a}_{p,j}) & \mathbf{W}_\ell^*(V_\ell(E_{3,j})) &\simeq \mathbf{WD}_{pc}^*(4; \mathbf{a}_{p,j}; -1) \end{aligned}$$

Si $3 \mid p-1$: pour chaque $a_{p,j} \in \mathcal{N}_{p,3}^\times$, $1 \leq j \leq 6$, on choisit un $v_j \in \mathbb{F}_p^\times$ tel que $a_p(\tilde{\mathcal{E}}_j) = a_{p,j}$ avec $\tilde{\mathcal{E}}_j : y^2 = x^3 + v_j$; les v_j sont un système de représentants de $\mathbb{F}_p^\times / (\mathbb{F}_p^\times)^6$ (lemme 3.2). Ces courbes sont ordinaires d'invariant modulaire 0. Par exemple, si $p = 7$, on peut prendre $v_1 = 1$, $v_2 = 2$, $v_3 = 3$, $v_4 = -3$, $v_5 = -2$, $v_6 = -1$, ce qui donne $a_{7,1} = -4$, $a_{7,2} = -1$, $a_{7,3} = -5$, $a_{7,4} = 5$, $a_{7,5} = 1$, $a_{7,6} = 4$. Alors $\{[v_j](-p)^i, 1 \leq j \leq 6, 0 \leq i \leq 5\}$ est un système de représentants de $\mathbb{Q}_p^\times / (\mathbb{Q}_p^\times)^6$.

On pose $\mathcal{E}_{i,j} : y^2 = x^3 + [v_j](-p)^i$ pour $1 \leq j \leq 6$ et $0 \leq i \leq 5$. Ce sont des courbes sur \mathbb{Q}_p d'invariant modulaire 0 représentant les éléments de $\text{Twist}((\mathcal{E}_{0,1}, \mathbf{0}), \mathbb{Q}_p) \simeq \mathbb{Q}_p^\times / (\mathbb{Q}_p^\times)^6$. On a alors pour chaque j :

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_\ell^*(V_\ell(\mathcal{E}_{0,j})) &\simeq \mathbf{WD}_c^*(1; \mathbf{a}_{p,j}) & \mathbf{W}_\ell^*(V_\ell(\mathcal{E}_{1,j})) &\simeq \mathbf{WD}_{pc}^*(6; \mathbf{a}_{p,j}; 1) \\ \mathbf{W}_\ell^*(V_\ell(\mathcal{E}_{2,j})) &\simeq \mathbf{WD}_{pc}^*(3; \mathbf{a}_{p,j}; 1) & \mathbf{W}_\ell^*(V_\ell(\mathcal{E}_{3,j})) &\simeq \mathbf{WD}_c^*(2; \mathbf{a}_{p,j}) \\ \mathbf{W}_\ell^*(V_\ell(\mathcal{E}_{4,j})) &\simeq \mathbf{WD}_{pc}^*(3; \mathbf{a}_{p,j}; -1) & \mathbf{W}_\ell^*(V_\ell(\mathcal{E}_{5,j})) &\simeq \mathbf{WD}_{pc}^*(6; \mathbf{a}_{p,j}; -1) \end{aligned}$$

3.2.2 Courbes elliptiques potentiellement supersingulières

Si $4 \mid p+1$: on pose $E_i : y^2 = x^3 + (-p)^i x$ pour $0 \leq i \leq 3$. Ce sont des courbes sur \mathbb{Q}_p d'invariant modulaire 1728 représentant les éléments de $\text{Twist}((E_0, \mathbf{0}), \mathbb{Q}_p) \simeq \mathbb{Q}_p^\times / (\mathbb{Q}_p^\times)^4$, la

courbe réduite de E_0 étant d'équation $y^2 = x^3 + x$. On a alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_\ell^*(V_\ell(E_0)) &\simeq \mathbf{WD}_c^*(1; 0) & \mathbf{W}_\ell^*(V_\ell(E_1)) &\simeq \mathbf{WD}_{pc}^*(4; 0) \\ \mathbf{W}_\ell^*(V_\ell(E_2)) &\simeq \mathbf{WD}_c^*(2; 0) & \mathbf{W}_\ell^*(V_\ell(E_3)) &\simeq \mathbf{WD}_{pc}^*(4; 0) \end{aligned}$$

Si $3 \mid p+1$: on pose $\mathcal{E}_i : y^2 = x^3 + (-p)^i$ pour $0 \leq i \leq 5$. Ce sont des courbes sur \mathbb{Q}_p d'invariant modulaire 0 représentant les éléments de $\text{Twist}((\mathcal{E}_0, \mathbf{0}), \mathbb{Q}_p) \simeq \mathbb{Q}_p^\times / (\mathbb{Q}_p^\times)^6$, la courbe réduite de \mathcal{E}_0 étant d'équation $y^2 = x^3 + 1$. On a alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_\ell^*(V_\ell(\mathcal{E}_0)) &\simeq \mathbf{WD}_c^*(1; 0) & \mathbf{W}_\ell^*(V_\ell(\mathcal{E}_1)) &\simeq \mathbf{WD}_{pc}^*(6; 0) \\ \mathbf{W}_\ell^*(V_\ell(\mathcal{E}_2)) &\simeq \mathbf{WD}_{pc}^*(3; 0) & \mathbf{W}_\ell^*(V_\ell(\mathcal{E}_3)) &\simeq \mathbf{WD}_c^*(2; 0) \\ \mathbf{W}_\ell^*(V_\ell(\mathcal{E}_4)) &\simeq \mathbf{WD}_{pc}^*(3; 0) & \mathbf{W}_\ell^*(V_\ell(\mathcal{E}_5)) &\simeq \mathbf{WD}_{pc}^*(6; 0) \end{aligned}$$

4 Construction de courbes potentiellement supersingulières

Pour déterminer tous les $\mathbb{Q}_p[G]$ -modules provenant d'une courbe elliptique sur \mathbb{Q}_p nous allons suivre la même stratégie que pour les cas $\ell \neq p$. Mais cette fois les opérations élémentaires sur les courbes elliptiques ne suffisent plus : il faut construire toutes les courbes sur \mathbb{Q}_p potentiellement supersingulières de défaut de semi-stabilité supérieur ou égal à 3.

Soit $O_{L_e} = \mathbb{Z}_p[\pi_e]$ l'anneau des entiers de $L_e = \mathbb{Q}_p(\pi_e)$. Dans un premier temps, pour $e < p-1$, on construit à partir d'une courbe elliptique \tilde{E}/\mathbb{F}_p supersingulière fixée tous les schémas elliptiques \mathcal{E}/O_{L_e} relevant \tilde{E} , à O_{L_e} -isomorphisme près (la restriction sur l'indice de ramification provient de la théorie des modules de Dieudonné filtrés). Puis, pour $e \in \{3, 4, 6\}$ et $e < p-1$, on détermine parmi ces schémas ceux qui sont susceptibles d'être définis sur \mathbb{Q}_p avec un défaut de semi-stabilité e , c'est-à-dire ceux pour lesquels il existe une courbe elliptique E/\mathbb{Q}_p telle que $E \times_{\mathbb{Q}_p} L_e \simeq \mathcal{E} \times_{O_{L_e}} L_e$ et $\text{dst}(E) = e$. On obtient finalement toutes les courbes elliptiques sur \mathbb{Q}_p potentiellement supersingulières, à \mathbb{Q}_p -isomorphisme près.

4.1 Préliminaires

4.1.1 Le foncteur de Serre-Tate

Soit $\mathcal{SE}_{O_{L_e}}$ la catégorie des schémas elliptiques sur O_{L_e} . On note $\mathcal{C}_{O_{L_e}}$ la catégorie dont les objets sont les triplets (\tilde{B}, Γ, ν) où \tilde{B}/\mathbb{F}_p est une courbe elliptique, Γ un groupe p -divisible sur O_{L_e} et $\nu : \tilde{B}(p) \xrightarrow{\sim} \tilde{\Gamma} = \Gamma \times_{O_{L_e}} \mathbb{F}_p$ un isomorphisme de groupes p -divisibles sur \mathbb{F}_p ; les morphismes $(\tilde{B}, \Gamma, \nu) \rightarrow (\tilde{B}', \Gamma', \nu')$ sont les couples (γ, ψ) où $\gamma : \tilde{B} \rightarrow \tilde{B}'$ est un morphisme de courbes elliptiques sur \mathbb{F}_p et $\psi : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ est un morphisme de groupes p -divisibles sur O_{L_e} tels que $\nu' \circ \gamma(p) = \tilde{\psi} \circ \nu$. Le théorème de Serre-Tate implique que le foncteur **ST** de $\mathcal{SE}_{O_{L_e}}$ dans $\mathcal{C}_{O_{L_e}}$ défini par $\mathbf{ST}(\mathcal{A}) = (\tilde{\mathcal{A}}, \mathcal{A}(p), \nu_{can})$, où $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \times_{O_{L_e}} \mathbb{F}_p$, établit une équivalence de catégories (voir [Ka] plus le fait que tout schéma algébrique de dimension relative 1 est algébrisable).

Pour \tilde{E}/\mathbb{F}_p fixée, on note $\mathcal{SE}_{O_{L_e}}(\tilde{E})$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{SE}_{O_{L_e}}$ formée des objets \mathcal{A} tels qu'il existe un \mathbb{F}_p -isomorphisme $\tilde{\mathcal{A}} \simeq \tilde{E}$ (i.e. \mathcal{A} est un schéma elliptique sur O_{L_e} relevant \tilde{E}) et $\mathcal{C}_{O_{L_e}}(\tilde{E})$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}_{O_{L_e}}$ formée des triplets du type (\tilde{E}, Γ, ν) . On voit que $\mathcal{SE}_{O_{L_e}}(\tilde{E})$ est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{SE}_{O_{L_e}}$ formée des objets \mathcal{A} tels qu'il existe un objet X de $\mathcal{C}_{O_{L_e}}(\tilde{E})$ avec $\mathbf{ST}(\mathcal{A}) \simeq X$ dans $\mathcal{C}_{O_{L_e}}$; on a, avec des notations évidentes,

$$\text{Hom}_{\mathcal{SE}_{O_{L_e}}(\tilde{E})}(\mathcal{A}, \mathcal{A}') \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}_{O_{L_e}}(\tilde{E})}(X, X')$$

Donc le foncteur **ST** induit une bijection entre les classes d'isomorphisme de $\mathcal{SE}_{O_{L_e}}(\tilde{E})$ et celles de $\mathcal{CO}_{L_e}(\tilde{E})$. Ainsi, étudier les schémas elliptiques sur O_{L_e} relevant \tilde{E} revient à étudier les relèvements du groupe p -divisible $\tilde{E}(p)$ sur \mathbb{F}_p en un groupe p -divisible sur O_{L_e} .

4.1.2 Modules de Dieudonné

Soient $k \subset \overline{\mathbb{F}}_p$ un corps fini et σ le Frobenius absolu agissant sur k (par $x \mapsto x^p$) et sur $W(k)$, l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k . Soit $\tilde{\Gamma}$ un groupe p -divisible sur k . On note $M = \mathbf{M}_k(\tilde{\Gamma}) = \text{Hom}_{\mathbf{D}_k}(\tilde{\Gamma}, C\widehat{W}(k))$ son module de Dieudonné sur k (voir [Fo 4]) : c'est un $W(k)$ -module libre de rang fini muni d'un opérateur de Frobenius σ -semi-linéaire φ vérifiant $pM \subset \varphi M$. Le foncteur \mathbf{M}_k induit une anti-équivalence entre la catégorie des groupes p -divisibles sur k et celle des $W(k)$ -modules libres de rang fini munis d'un opérateur φ comme ci-dessus ([Fo 4], III, prop.6.1 et rmq.3 qui suit). On note \mathbf{MD}_k cette dernière catégorie ; si $k = \mathbb{F}_p$ on écrit $\mathbf{M}_{\mathbb{F}_p} = \mathbf{M}$.

Si \tilde{E}/\mathbb{F}_p est supersingulière alors $M = \mathbf{M}(\tilde{E}(p))$ est un \mathbb{Z}_p -module libre de rang 2 muni d'un Frobenius \mathbb{Z}_p -linéaire $\varphi = \mathbf{M}(\text{Frob}_{\tilde{E}}(p))$ vérifiant $\varphi^2 + p = 0$. Si $x \in M$ est tel que $x \notin \varphi M$ alors $\varphi x \notin pM$ et $(x, \varphi x)$ est une base de M ; un tel x est donc un générateur du $\mathbb{Z}_p[\varphi]$ -module M . En particulier, on en déduit que deux courbes elliptiques sur \mathbb{F}_p supersingulières ont des groupes p -divisibles isomorphes, et l'isomorphisme canonique $\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathbb{F}_p}(\tilde{E}, \tilde{E}') \simeq \text{Hom}_{\mathbb{F}_p}(\tilde{E}(p), \tilde{E}'(p))$ (cf. [Wa-Mi], II) montre qu'elles sont liées par une \mathbb{F}_p -isogénie de degré premier à p .

Il y a, à \mathbb{F}_p -isomorphisme près, deux courbes elliptiques sur \mathbb{F}_p supersingulières ayant un invariant modulaire donné, l'une est une tordue sur \mathbb{F}_{p^2} de l'autre ; de plus, $\text{Aut}_{\mathbb{F}_p}(\tilde{E})$ est toujours d'ordre 2 lorsque \tilde{E} est supersingulière ([Si 1], prop.5.4 et cor.5.4.1).

Soit \tilde{E}/\mathbb{F}_p supersingulière d'invariant modulaire $\tilde{j}(e)$ avec $e \in \{3, 4, 6\}$ et $\tilde{j}(3) = \tilde{j}(6) = 0$, $\tilde{j}(4) = 1728$; donc $e \mid p+1$ et $[\zeta_e] \in \text{Aut}_{\mathbb{F}_{p^2}}(\tilde{E})$. Soit f le Frobenius arithmétique agissant sur \tilde{E} ; comme $p \equiv -1 \pmod{e\mathbb{Z}}$, on a $[\zeta_e]f = f[\zeta_e]^{-1}$. Le Frobenius φ agissant sur $M = \mathbf{M}(\tilde{E}(p))$ s'étend σ -semi-linéairement sur $R = M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_{p^2}$ où $\mathbb{Z}_{p^2} = W(\mathbb{F}_{p^2})$ est l'anneau des entiers de \mathbb{Q}_{p^2} . Notons $\xi_e = \mathbf{M}_{\mathbb{F}_{p^2}}([\zeta_e](p))$: c'est un automorphisme \mathbb{Z}_{p^2} -linéaire de R d'ordre e et de déterminant 1. L'objet $D = M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_{p^2}$ est un $(\varphi, G_{K_e/L_e})$ -module de dimension 2 dans lequel la relation $[\zeta_e]f = f[\zeta_e]^{-1}$ se traduit par les relations $\xi_e \varphi = \varphi \xi_e$ et $\omega \xi_e = \xi_e^{-1} \omega$ (avec $\langle \omega \rangle = G_{K_e/L_e}$, cf. 1.3.2). Il existe alors une \mathbb{Z}_{p^2} -base (e_1, e_2) de $R \subset D$ et un $\eta \in (\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})^\times = \{\pm 1\}$ tels que

$$\varphi e_1 = e_2, \quad \varphi e_2 = -p e_1 \quad ; \quad \omega e_1 = e_1, \quad \omega e_2 = e_2 \quad ; \quad \xi_e e_1 = \zeta_e^\eta e_1, \quad \xi_e e_2 = \zeta_e^{-\eta} e_2$$

En effet, on montre d'abord l'existence d'une telle base pour D ; puis, à homothétie près, tout \mathbb{Z}_{p^2} -réseau de D stable par φ est de la forme $\mathbb{Z}_{p^2} e_1 \oplus \mathbb{Z}_{p^2} e_2$ ou $\varphi(\mathbb{Z}_{p^2} e_1 \oplus \mathbb{Z}_{p^2} e_2)$. Dans cette situation, on dira que le générateur e_1 du $\mathbb{Z}_p[\varphi]$ -module M est adapté au groupe d'automorphismes de \tilde{E} . Le choix d'un tel générateur est unique à un élément de \mathbb{Z}_p^\times près.

4.1.3 Modules de Dieudonné filtrés

Pour étudier les relèvements sur O_{L_e} de groupes p -divisibles sur \mathbb{F}_p on utilise la théorie des modules de Dieudonné filtrés sur O_{L_e} telle qu'elle est décrite dans [Fo 4], IV, §2 à 5. Pour $e \leq p-1$ on définit la catégorie $\mathbf{MD}_{O_{L_e}}$ suivante :

- les objets sont les couples (M, \mathcal{L}) , où M est un \mathbb{Z}_p -module libre de rang fini muni d'un opérateur de Frobenius \mathbb{Z}_p -linéaire φ tel que $pM \subset \varphi M$ (i.e. M est un objet de $\mathbf{MD}_{\mathbb{F}_p}$), et \mathcal{L} est un sous- O_{L_e} -module de

$$\mathcal{M} = M \otimes_{\mathbb{Z}_p} O_{L_e} + \varphi M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \pi_e^{1-e} O_{L_e} \subset M \otimes_{\mathbb{Z}_p} L_e$$

tel que l'inclusion $\mathcal{L} \hookrightarrow \mathcal{M}$ induit un isomorphisme de \mathbb{F}_p -espaces vectoriels

$$\mathcal{L}/\pi_e \mathcal{L} \simeq \mathcal{M}/(\varphi M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \pi_e^{1-e} O_{L_e}) \quad (*)$$

- un morphisme $(M, \mathcal{L}) \rightarrow (M', \mathcal{L}')$ est une application \mathbb{Z}_p -linéaire $\psi : M \rightarrow M'$ qui commute aux Frobenius et qui, après extension des scalaires, envoie \mathcal{L} dans \mathcal{L}' .

Soit Γ un groupe p -divisible sur O_{L_e} et $\tilde{\Gamma} = \Gamma \times_{O_{L_e}} \mathbb{F}_p$ sa fibre spéciale. Dans [Fo 4] J.-M. Fontaine construit un sous- O_{L_e} -module $\mathcal{L}(\Gamma)$ de $\mathcal{M}(\tilde{\Gamma}) = \mathbf{M}(\tilde{\Gamma}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} O_{L_e} + \varphi \mathbf{M}(\tilde{\Gamma}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \pi_e^{1-e} O_{L_e}$ qui vérifie (*), de sorte que le couple $(\mathbf{M}(\tilde{\Gamma}), \mathcal{L}(\Gamma))$ est un objet de $\mathbf{MD}_{O_{L_e}}$. L'association $\Gamma \mapsto \mathbf{M}_{O_{L_e}}(\Gamma) = (\mathbf{M}(\tilde{\Gamma}), \mathcal{L}(\Gamma))$ est fonctorielle et lorsque $e < p-1$ elle induit une anti-équivalence entre la catégorie des groupes p -divisibles sur O_{L_e} et $\mathbf{MD}_{O_{L_e}}$ ([Fo 4], IV, prop.5.1). De plus, on a un isomorphisme canonique de φ -modules filtrés $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbf{M}_{O_{L_e}}(\Gamma) \simeq \mathbf{D}_{cris, L_e}^*(V_p(\Gamma))$ qui fait le lien entre le Module de Dieudonné filtré de Γ et la théorie cristalline (voir [Fo 5]).

Dans toute la suite on suppose $e < p-1$. Soit M un objet de $\mathbf{MD}_{\mathbb{F}_p}$; les relèvements de M en un objet de $\mathbf{MD}_{O_{L_e}}$ sont alors en correspondance bijective avec les sous- O_{L_e} -modules \mathcal{L} de \mathcal{M} tels que l'inclusion $\mathcal{L} \hookrightarrow \mathcal{M}$ induit un isomorphisme de \mathbb{F}_p -espaces vectoriels $\mathcal{L}/\pi_e \mathcal{L} \simeq \mathcal{M}/(\varphi M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \pi_e^{1-e} O_{L_e})$.

4.2 Schémas elliptiques supersinguliers

On fixe \tilde{E}/\mathbb{F}_p supersingulière et l'on note $M = \mathbf{M}(\tilde{E}(p))$ et $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\tilde{E}(p))$. On choisit un générateur e_1 du $\mathbb{Z}_p[\varphi]$ -module M , d'où $M = \mathbb{Z}_p e_1 \oplus \mathbb{Z}_p e_2$ avec $\varphi e_1 = e_2$ et $\varphi e_2 = -p e_1$. Alors on a $\mathcal{M} = O_{L_e}(e_1 \otimes 1) \oplus O_{L_e}(e_2 \otimes \pi_e^{1-e})$ et

$$\mathcal{M}/(\varphi M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \pi_e^{1-e} O_{L_e}) \simeq \mathbb{F}_p((e_1 \otimes 1) \bmod \pi_e \mathcal{M})$$

On en déduit que les relèvements de M en un module de Dieudonné sur O_{L_e} correspondent bijectivement aux

$$\mathcal{L}(\beta) = (e_1 \otimes 1 + \beta \cdot e_2 \otimes \pi_e^{1-e}) O_{L_e} \quad , \quad \beta \in O_{L_e}$$

Soit (\tilde{E}, Γ, ν) un objet de $\mathcal{C}_{O_{L_e}}(\tilde{E})$. Alors $\mathbf{M}_{O_{L_e}}(\Gamma) = (\mathbf{M}(\tilde{\Gamma}), \mathcal{L}(\Gamma))$ est un objet de $\mathbf{MD}_{O_{L_e}}$ et $\mathbf{M}(\nu) : \mathbf{M}(\tilde{\Gamma}) \xrightarrow{\sim} M$ est un isomorphisme dans $\mathbf{MD}_{\mathbb{F}_p}$; on a donc $\mathbf{M}(\nu)(\varphi \mathbf{M}(\tilde{\Gamma})) = \varphi M$. On note $\mathbf{M}(\nu)_{L_e}$ l'application L_e -linéaire de $\mathcal{M}(\tilde{\Gamma})$ dans \mathcal{M} déduite par extension des scalaires; on a $\mathbf{M}(\nu)_{L_e}(\mathcal{M}(\tilde{\Gamma})) = \mathcal{M}$. Alors $\mathbf{M}(\nu)_{L_e}(\mathcal{L}(\Gamma))$ est un sous- O_{L_e} -module de rang 1 de \mathcal{M} tel que l'inclusion induit un isomorphisme de \mathbb{F}_p -espaces vectoriels

$$\mathbf{M}(\nu)_{L_e}(\mathcal{L}(\Gamma)) / \pi_e(\mathbf{M}(\nu)_{L_e}(\mathcal{L}(\Gamma))) \simeq \mathcal{M}/(\varphi M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \pi_e^{1-e} O_{L_e})$$

Il existe donc un unique $\beta \in O_{L_e}$ tel que $\mathbf{M}(\nu)_{L_e}(\mathcal{L}(\Gamma)) = \mathcal{L}(\beta) \subset \mathcal{M}$.

Lemme 4.1 Soient (\tilde{E}, Γ, ν) , $(\tilde{E}, \Gamma', \nu')$ deux objets de $\mathcal{C}_{O_{L_e}}(\tilde{E})$ et $\beta, \beta' \in O_{L_e}$ tels que $\mathbf{M}(\nu)_{L_e}(\mathcal{L}(\Gamma)) = \mathcal{L}(\beta)$ et $\mathbf{M}(\nu')_{L_e}(\mathcal{L}(\Gamma')) = \mathcal{L}(\beta')$. Alors on a un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_{O_{L_e}}(\tilde{E})}((\tilde{E}, \Gamma, \nu), (\tilde{E}, \Gamma', \nu')) \simeq \{ \gamma \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}_p}(\tilde{E}) / \mathbf{M}(\gamma(p))_{L_e}(\mathcal{L}(\beta')) \subset \mathcal{L}(\beta) \}$$

Preuve. C'est immédiat, en utilisant les définitions des catégories $\mathcal{C}_{O_{L_e}}(\tilde{E})$ et $\mathbf{MD}_{O_{L_e}}$ ainsi que la pleine fidélité des foncteurs \mathbf{M} et $\mathbf{M}_{O_{L_e}}$. \square

Proposition 4.2 *Soit $e < p - 1$. Soit \tilde{E}/\mathbb{F}_p une courbe elliptique supersingulière. Via le choix d'un générateur du $\mathbb{Z}_p[\varphi]$ -module $\mathbf{M}(\tilde{E}(p))$, l'association*

$$\begin{cases} \mathcal{C}_{O_{L_e}}(\tilde{E}) & \rightarrow O_{L_e} \\ (\tilde{E}, \Gamma, \nu) & \mapsto \beta \text{ tel que } \mathcal{L}(\beta) = \mathbf{M}(\nu)_{L_e}(\mathcal{L}(\Gamma)) \end{cases}$$

induit une bijection entre les classes d'isomorphisme dans $\mathcal{C}_{O_{L_e}}(\tilde{E})$ et O_{L_e} .

En composant avec le foncteur \mathbf{ST} on obtient une bijection entre les classes d'isomorphisme dans $\mathcal{SE}_{O_{L_e}}(\tilde{E})$ et O_{L_e} . Notons que le choix d'un autre générateur du $\mathbb{Z}_p[\varphi]$ -module M change l'invariant β en $(a + b\pi_e\beta)^{-1}(b\pi_e^{e-1} + a\beta)$ avec $a \in \mathbb{Z}_p^\times$ et $b \in \mathbb{Z}_p$.

Preuve. Montrons d'abord la surjectivité. Soit $\beta \in O_{L_e}$. Il existe un groupe p -divisible J_β sur O_{L_e} et un isomorphisme $\xi_\beta : \mathbf{M}_{O_{L_e}}(J_\beta) \xrightarrow{\sim} (M, \mathcal{L}(\beta))$ dans $\mathbf{MD}_{O_{L_e}}$. Il induit un isomorphisme $\xi_\beta : \mathbf{M}(\tilde{J}_\beta) \xrightarrow{\sim} M$ de modules de Dieudonné sur \mathbb{F}_p et il existe un unique isomorphisme $\nu_\beta : \tilde{E}(p) \xrightarrow{\sim} \tilde{J}_\beta$ de groupes p -divisibles sur \mathbb{F}_p tel que $\mathbf{M}(\nu_\beta) = \xi_\beta$. Alors le triplet $(\tilde{E}, J_\beta, \nu_\beta)$ est un objet de $\mathcal{C}_{O_{L_e}}(\tilde{E})$ tel que $\mathbf{M}(\nu_\beta)_{L_e}(\mathcal{L}(J_\beta)) = \xi_\beta(\mathcal{L}(J_\beta)) = \mathcal{L}(\beta)$.

Montrons maintenant l'injectivité. Soient (\tilde{E}, Γ, ν) et $(\tilde{E}, \Gamma', \nu')$ deux objets de $\mathcal{C}_{O_{L_e}}(\tilde{E})$, avec $\mathbf{M}(\nu)_{L_e}(\mathcal{L}(\Gamma)) = \mathcal{L}(\beta)$ et $\mathbf{M}(\nu')_{L_e}(\mathcal{L}(\Gamma')) = \mathcal{L}(\beta')$, $\beta, \beta' \in O_{L_e}$. D'après le lemme 4.1 ils sont isomorphes si et seulement si il existe $\gamma \in \text{Aut}_{\mathbb{F}_p}(\tilde{E})$ tel que $\mathbf{M}(\gamma(p))_{L_e}(\mathcal{L}(\beta')) \subset \mathcal{L}(\beta)$. Or, \tilde{E}/\mathbb{F}_p étant supersingulière, on a $\text{Aut}_{\mathbb{F}_p}(\tilde{E}) = \{\pm 1\}$. La multiplication par (-1) sur \tilde{E} induit $-\text{Id}_M$ sur M , d'où $\mathbf{M}([-1]_{\tilde{E}}(p))(\mathcal{L}(\beta')) = \mathcal{L}(\beta')$. Donc (\tilde{E}, Γ, ν) et $(\tilde{E}, \Gamma', \nu')$ sont isomorphes si et seulement si $\mathcal{L}(\beta') \subset \mathcal{L}(\beta)$, c'est-à-dire $\beta = \beta'$. \square

Pour tout $\beta \in O_{L_e}$ on note \mathcal{E}_β le schéma elliptique sur O_{L_e} , unique à O_{L_e} -isomorphisme près, qui correspond par \mathbf{ST} à un objet isomorphe dans $\mathcal{C}_{O_{L_e}}$ à un triplet $(\tilde{E}, J_\beta, \nu_\beta)$, avec $\mathbf{M}(\nu_\beta)_{L_e}(\mathcal{L}(J_\beta)) = \mathcal{L}(\beta) \subset \mathcal{M}$. Soient $\beta, \beta' \in O_{L_e}$; on a un isomorphisme

$$\text{Hom}_{\mathcal{SE}_{O_{L_e}}(\tilde{E})}(\mathcal{E}_\beta, \mathcal{E}_{\beta'}) \simeq \{ \gamma \in \text{End}_{\mathbb{F}_p}(\tilde{E}) / \mathbf{M}(\gamma(p))_{L_e}(\mathcal{L}(\beta')) \subset \mathcal{L}(\beta) \}$$

Remarque 4.3 Lorsque $\gamma \in \text{End}_{\mathbb{F}_p}(\tilde{E})$ le polynôme caractéristique de $\mathbf{M}(\gamma(p))$ doit être dans $\mathbb{Q}[X]$. Dans la base (e_1, e_2) de M sa matrice doit s'écrire sous la forme

$$\begin{pmatrix} a & -pc \\ c & a \end{pmatrix} \quad a, c \in \mathbb{Z}_p$$

pour commuter avec φ , d'où $a \in \mathbb{Q}$ et $c^2 \in \mathbb{Q}$. Prenons $e = 1$ et $\beta \in \mathbb{Z}_p$; alors on a $\mathbf{M}(\gamma(p))(\mathcal{L}(\beta)) \subset \mathcal{L}(0)$ si et seulement si $a\beta + c = 0$. On en déduit que si β n'appartient à aucune extension quadratique de \mathbb{Q} les schémas \mathcal{E}_0 et \mathcal{E}_β ne sont pas \mathbb{Z}_p -isogènes.

Remarque 4.4 Si $j(\tilde{E}) = 0$ ou 1728 on peut choisir un générateur du $\mathbb{Z}_p[\varphi]$ -module $\mathbf{M}(\tilde{E}(p))$ qui est adapté au groupe d'automorphismes de \tilde{E} (cf. 4.1.2). Avec ce choix on a $j(\mathcal{E}_\beta) = 0$ ou 1728 si et seulement si $\beta = 0$ (voir prop. 4.8). Par analogie avec le cas ordinaire on appelle \mathcal{E}_0 le relèvement canonique de \tilde{E} sur O_{L_e} .

Dans la suite, pour chaque $e \in \{3, 4, 6\}$, on s'intéresse au problème suivant : parmi les schémas elliptiques sur O_{L_e} relevant \tilde{E} décrits ci-dessus, quels sont ceux qui proviennent d'une courbe elliptique définie sur \mathbb{Q}_p ? Nous allons chercher ceux qui sont définis sur \mathbb{Q}_p et dont le défaut de semi-stabilité est e . Soit $\beta \in O_{L_e}$. Par le théorème de pleine fidélité de Tate, le module de Dieudonné filtré $(M, \mathcal{L}(\beta))$ caractérise le $\mathbb{Z}_p[G_{L_e}]$ -module $T_p(\mathcal{E}_\beta)$; on a un isomorphisme canonique de $(\varphi, G_{K_e/L_e})$ -modules filtrés

$$(M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_{p^2}, \mathcal{L}(\beta) \otimes_{O_{L_e}} K_e) \simeq \mathbf{D}_{\text{cris}, K_e}^*(V_p(\mathcal{E}_\beta))$$

Si \mathcal{E}_β est définie sur \mathbb{Q}_p avec un défaut de semi-stabilité e alors $\mathbf{D}_{\text{cris}, K_e}^*(V_p(\mathcal{E}_\beta))$ devient un $(\varphi, G_{K_e/\mathbb{Q}_p})$ -module filtré, c'est-à-dire qu'il est en plus muni d'une action de $G_{K_e/\mathbb{Q}_{p^2}} = I(K_e/\mathbb{Q}_p)$ compatible avec toutes les autres structures. On sait qu'alors cette action doit être comme dans les objets $\mathbf{D}_{\text{pc}}^*(\mathbf{e}; \mathbf{0}; \alpha)$ de la liste \mathbf{D}^* décrits en 2.2.1, ce qui amène à considérer un critère galoisien de descente.

4.3 Un critère galoisien de descente

Soient $F \subset \overline{\mathbb{Q}_p}$ une extension finie de \mathbb{Q}_p et $K \subset \overline{\mathbb{Q}_p}$ une extension finie galoisienne de F totalement ramifiée, d'indice de ramification absolu $e(K)$, d'anneau des entiers O_K et de corps résiduel k . On note $G_{K/F} = \text{Gal}(K/F)$.

Soit E/F une courbe elliptique qui acquiert bonne réduction sur K . Alors le groupe $G_{K/F}$ opère sur $E_K = E \times_F K$ via son action sur K et cette action s'étend par fonctorialité au modèle de Néron de E_K . Comme $G_{K/F}$ agit trivialement sur k , son action sur la fibre spéciale \tilde{E}_K s'effectue par des k -automorphismes de celle-ci, c'est-à-dire par un morphisme $G_{K/F} \rightarrow \text{Aut}_k(\tilde{E}_K)$. En particulier, l'action de G_K sur $T_p(E_K)$ s'étend en une action de G_F de telle sorte que, pour $e(K) < p - 1$, sur le module de Dieudonné filtré associé au groupe p -divisible $E_K(p)$, on a une action de $G_{K/F}$ sur $\mathbf{M}_k(\tilde{E}_K(p))$ qui préserve la filtration et qui provient d'un morphisme

$$G_{K/F} \rightarrow \text{Aut}_k(\tilde{E}_K) \hookrightarrow \text{Aut}_k(\tilde{E}_K(p)) \simeq \text{Aut}_{\mathbf{MD}_k}(\mathbf{M}_k(\tilde{E}_K(p)))$$

Réciproquement, on a le théorème suivant :

Théorème 4.5 *Soit E/K une courbe elliptique ayant bonne réduction sur K . Alors E est définie sur F si et seulement si l'action de G_K sur $T_p(E)$ s'étend en une action de G_F qui provient de k -automorphismes de la fibre spéciale \tilde{E} de E .*

Plus précisément, il existe alors une courbe elliptique E_0 sur F et un K -isomorphisme $\psi : E_0 \times_F K \xrightarrow{\sim} E$ induisant un isomorphisme G_F -équivariant $\psi_p : T_p(E_0) \xrightarrow{\sim} T_p(E)$, où G_F agit naturellement sur $T_p(E_0)$ et sur $T_p(E)$ par l'action prolongée que l'on s'est donnée ; un tel couple (E_0, ψ) est unique à F -isomorphisme près. De plus, le défaut de semi-stabilité de E_0 est égal à l'indice du noyau de $G_{K/F} \rightarrow \text{Aut}_k(\tilde{E})$ dans $G_{K/F}$.

Preuve. Pour tout $\omega \in G_{K/F}$ on note E^ω la courbe elliptique sur K déduite de E par le changement de base $\text{Spec}(\omega^{-1}) : \text{Spec}(K) \rightarrow \text{Spec}(K)$. L'association $E \mapsto E^\omega$ définit un foncteur \mathcal{F}_ω de la catégorie des courbes elliptiques sur K dans elle-même ; on a $\mathcal{F}_{\omega\tau} = \mathcal{F}_\omega \circ \mathcal{F}_\tau$ pour tous $\omega, \tau \in G_{K/F}$ et $\mathcal{F}_1 = \text{Id}$ (le groupe $G_{K/F}$ agit sur la catégorie). Rappelons le critère de Weil : la courbe E est définie sur F si et seulement si il existe un ensemble de K -isomorphismes $f_\omega : E \rightarrow E^\omega$, $\omega \in G_{K/F}$, vérifiant

$$(*) \quad f_{\omega\tau} = (f_\tau)^\omega \circ f_\omega \quad \forall \omega, \tau \in G_{K/F}$$

Il existe alors une courbe elliptique E_0/F et un K -isomorphisme $\psi : E_0 \times_F K \xrightarrow{\sim} E$ tel que $f_\omega = \psi^\omega \circ \psi^{-1}$ pour tout $\omega \in G_{K/F}$; le couple (E_0, ψ) est unique à K -isomorphisme près ([We] et [La] thm.2G). Un ensemble $\{f_\omega : E \rightarrow E^\omega, \omega \in G_{K/F}\}$ vérifiant la condition (*) est appelé un système cohérent d'isomorphismes.

Soit $\hat{\omega}$ relèvement de $\omega \in G_{K/F}$ dans G_F ; on a un isomorphisme de groupes de $E(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ dans $E^\omega(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ donné par $\eta \mapsto \hat{\omega} \circ \eta$ (il dépend du relèvement choisi) induisant une bijection \mathbb{Z}_p -linéaire $\alpha_{\hat{\omega}} : T_p(E) \rightarrow T_p(E^\omega)$. On se donne un morphisme $\rho : G_F \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{Z}_p}(T_p(E))$ dont la restriction à G_K est l'action naturelle. Alors, pour tout $\omega \in G_{K/F}$, l'isomorphisme \mathbb{Z}_p -linéaire

$$f_{\omega,p} : \begin{cases} T_p(E) & \rightarrow T_p(E^\omega) \\ x & \mapsto \alpha_{\hat{\omega}}(\rho(\hat{\omega}^{-1})(x)) \end{cases}$$

est G_K -équivariant et ne dépend pas du relèvement de ω dans G_F . Supposons qu'il existe un système cohérent d'isomorphismes $\{f_\omega : E \rightarrow E^\omega, \omega \in G_{K/F}\}$ tel que $T_p(f_\omega) = f_{\omega,p}$ pour tout $\omega \in G_{K/F}$; soit (E_0, ψ) le couple obtenu par le critère de Weil. Alors ψ induit un isomorphisme G_F -équivariant $T_p(\psi) = \psi_p : \underbrace{T_p(E_0)}_{\text{action naturelle}} \xrightarrow{\sim} \underbrace{T_p(E)}_{\text{action étendue}}$.

Le choix d'une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_p$ définit un foncteur contravariant Φ de la catégorie \mathcal{C} des schémas en groupes finis et étales sur $\text{Spec}(K)$ dans la catégorie \mathcal{T} des groupes abéliens finis munis d'une action de G_K , par $\Phi : X \mapsto X(\overline{\mathbb{Q}}_p) = \text{Hom}_{K\text{-alg}}(B, \overline{\mathbb{Q}}_p)$ où $X = \text{Spec}(B)$; le foncteur $\Psi : T \mapsto \text{Spec}((\text{Fcts}(T, \overline{\mathbb{Q}}_p))^{G_K})$ de \mathcal{T} dans \mathcal{C} est un quasi-inverse. Alors, pour tout $\omega \in G_{K/F}$ et pour tout $T \in \text{Ob}(\mathcal{T})$, on pose

$$T^\omega = \Phi(\Psi(T)^\omega) = \text{Hom}_{K\text{-alg}}\left((\text{Fcts}(T, \overline{\mathbb{Q}}_p))^{G_K} \otimes_{K'^{\omega^{-1}}} K, \overline{\mathbb{Q}}_p\right)$$

L'objet T^ω est bien défini et l'on obtient ainsi une action de $G_{K/F}$ sur la catégorie \mathcal{T} par "transport de structure". Par passage à la limite on définit T^ω où T est un module de Tate; si $T = T_p(E)$ alors on a $(T_p(E))^\omega = T_p(E^\omega)$. On a ainsi une notion de système cohérent d'isomorphismes de $\mathbb{Z}_p[G_K]$ -modules. Alors le fait que l'action de G_K sur $T_p(E)$ s'étend en une action de G_F implique que le système $\{f_{\omega,p} : T_p(E) \rightarrow T_p(E^\omega), \omega \in G_{K/F}\}$ est cohérent (c'est purement formel).

L'unicité du modèle de Néron ainsi que la pleine fidélité du foncteur de Serre-Tate impliquent que l'existence d'un système cohérent de K -isomorphismes $\{f_\omega : E \rightarrow E^\omega, \omega \in G_{K/F}\}$ équivaut aux données suivantes :

- (1) un ensemble d'isomorphismes $\{f_\omega(p) : E(p) \rightarrow E^\omega(p), \omega \in G_{K/F}\}$ de groupes p -divisibles sur O_K tels que $f_{\omega\tau}(p) = (f_\tau(p))^\omega \circ f_\omega(p)$ pour tous $\omega, \tau \in G_{K/F}$ (cohérence);
- (2) un ensemble d'isomorphismes $\{\tilde{f}_\omega : \tilde{E} \rightarrow \tilde{E}^\omega, \omega \in G_{K/F}\}$ de courbes elliptiques sur k tels que $\tilde{f}_\omega(p) = \widetilde{f_\omega(p)}$ pour tout $\omega \in G_{K/F}$ (recollement).

En effet, la condition de cohérence sur les \tilde{f}_ω est vérifiée grâce aux injections canoniques

$$\text{Hom}_k(\tilde{E}, \tilde{E}^\omega) \hookrightarrow \text{Hom}_k(\tilde{E}(p), \tilde{E}^\omega(p))$$

Le système cohérent $\{f_{\omega,p}, \omega \in G_{K/F}\}$ fournit par le théorème de pleine fidélité de Tate un système cohérent $\{f_\omega(p) : E(p) \rightarrow E^\omega(p), \omega \in G_{K/F}\}$ d'isomorphismes de groupes p -divisibles sur O_K , ce qui permet de satisfaire (1). Soit $\{\tilde{f}_\omega(p) : \tilde{E}(p) \rightarrow \tilde{E}^\omega(p), \omega \in G_{K/F}\}$

le système cohérent déduit sur les groupes p -divisibles des fibres spéciales. L'extension K/F étant totalement ramifiée, on a $\widetilde{E}^\tau = \widetilde{E}$ pour tout $\tau \in G_{K/F}$, et la cohérence signifie que l'association $\tau \mapsto \widetilde{f_\tau(p)}$ est un morphisme $r_p : G_{K/F} \rightarrow \text{Aut}_k(\widetilde{E}(p)) \simeq (\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \text{End}_k(\widetilde{E}))^\times$. Alors E est définie sur F si et seulement si r_p provient par extension des scalaires d'un morphisme $r : G_{K/F} \rightarrow \text{Aut}_k(\widetilde{E})$. En effet, il suffit de poser $\tilde{f}_\tau = r(\tau)$ pour tout $\tau \in G_{K/F}$: ce sont des k -isomorphismes de \widetilde{E} qui vérifient, par construction, la condition (2).

Soit $K_0 = \text{Frac}(W(k))$ l'extension maximale non ramifiée contenue dans K . Prolonger l'action de G_K à G_F sur $V_p(E)$ revient à munir le φ -module filtré $D = \mathbf{D}_{\text{cris},K}^*(V_p(E))$ d'une structure d'objet de $\mathbf{MF}_{K/F}(\varphi)$, c'est-à-dire faire agir K_0 -linéairement $G_{K/F}$ sur D de sorte que cette action commute avec φ et respecte la filtration sur $D \otimes_{K_0} K$; l'objet D est alors isomorphe dans $\mathbf{MF}_{K/F}(\varphi)$ à $\mathbf{D}_{\text{cris},K/F}^*(V_p(E_0))$. En oubliant la filtration on obtient un morphisme $\nu : G_{K/F} \rightarrow \text{Aut}_{K_0[\varphi]}(D)$ et le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
& & \text{Aut}_k(\widetilde{E}) \\
& \nearrow r & \downarrow \\
G_{K/F} & \xrightarrow{r_p} & \text{Aut}_k(\widetilde{E}(p)) \\
\downarrow \nu & & \downarrow \wr \\
& & \text{Aut}_{\mathbf{MD}_k}(\mathbf{M}_k(\widetilde{E}(p))) \\
& & \downarrow \\
\text{Aut}_{K_0[\varphi]}(D) & \xrightarrow[\text{can}]{\sim} & \text{Aut}_{K_0[\varphi]}(K_0 \otimes_{W(k)} \mathbf{M}_k(\widetilde{E}(p)))
\end{array}$$

Soit F' le sous-corps de K fixe par $\text{Ker}(r) = \text{Ker}(\nu)$. La courbe E_0/F acquiert bonne réduction sur F' puisque $V_p(E_0)$ est cristalline sur F' . Elle n'acquiert bonne réduction sur aucun sous-corps strict de F' contenu dans F car $V_p(E_0)$ ne peut être cristalline sur un tel corps : ν induit une injection $\text{Gal}(F'/F) \hookrightarrow \text{Aut}_{K_0[\varphi]}(D)$. Donc $\text{dst}(E_0)$ est égal au degré de l'extension F'/F qui est aussi l'indice de $\text{Ker}(r)$ dans $G_{K/F}$. \square

Le lemme qui suit permet de traiter des situations où l'extension K/F est totalement ramifiée mais pas nécessairement galoisienne. Soient F_1, F_2 deux corps tels que $F \subset F_i \subset K$, $F = F_1 \cap F_2$ et $K = F_1 F_2$; posons $G_{K/F_i} = \text{Gal}(K/F_i)$. Supposons l'extension F_1/F galoisienne : $G_{K/F}$ est un produit semi-direct de G_{K/F_2} par G_{K/F_1} .

Lemme 4.6 *Soient F_1, F_2 comme ci-dessus. Supposons E définie sur F_1 et sur F_2 , ce qui prolonge l'action de G_K sur $T_p(E)$ en une action de G_{F_1} et une de G_{F_2} . Si l'action de G_K s'étend sur $T_p(E)$ en une action de G_F qui coïncide avec celles de G_{F_1} et G_{F_2} , alors E est définie sur F .*

Preuve. On dispose de deux systèmes cohérents d'isomorphismes $\{f_{\omega_i} : E \rightarrow E^{\omega_i}, \omega_i \in G_{K/F_i}\}$, $i = 1, 2$, et il s'agit de montrer l'existence d'un système cohérent $\{f_\omega : E \rightarrow E^\omega, \omega \in G_{K/F}\}$. Tout élément ω de $G_{K/F}$ s'écrivant de manière unique $\omega = \omega_1 \omega_2$ avec $\omega_i \in G_{K/F_i}$, on pose $f_\omega = f_{\omega_1 \omega_2} = (f_{\omega_2})^{\omega_1} \circ f_{\omega_1}$. Comme l'action de G_K sur $T_p(E)$ s'étend à G_F de sorte qu'elle coïncide avec celles de G_{F_1} et de G_{F_2} , le système de $\mathbb{Z}_p[G_K]$ -isomorphismes $\{T_p(f_\omega) : T_p(E) \rightarrow T_p(E^\omega), \omega \in G_{K/F}\}$ est cohérent. Alors l'injection canonique $\text{Hom}_K(E, E') \hookrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p[G_K]}(T_p(E), T_p(E'))$ pour deux courbes elliptiques E et E' sur K permet d'obtenir la cohérence du système $\{f_\omega, \omega \in G_{K/F}\}$ à partir de celle de $\{T_p(f_\omega), \omega \in G_{K/F}\}$. \square

Remarque 4.7 Le théorème 4.5 et le lemme 4.6 sont également valables pour des variétés abéliennes de dimension relative quelconque (les preuves sont les mêmes).

4.4 Courbes potentiellement supersingulières

Nous allons appliquer le théorème de descente 4.5 à notre situation. Comme $e \in \{3, 4, 6\}$ on voit que l'on doit partir d'une courbe \tilde{E}/\mathbb{F}_p ayant suffisamment d'automorphismes (définis sur \mathbb{F}_{p^2}), c'est-à-dire telle que $[\zeta_e] \in \text{Aut}_{\mathbb{F}_{p^2}}(\tilde{E})$. On fixe \tilde{E}/\mathbb{F}_p supersingulière d'invariant modulaire $\tilde{j}(e)$ avec $\tilde{j}(3) = \tilde{j}(6) = 0$ et $\tilde{j}(4) = 1728$; alors $e \mid p+1$ et pour satisfaire la condition $e < p-1$ il faut exclure le cas $(e, p) = (6, 5)$ (voir cependant la rmq. 4.11(ii)). De plus, l'extension L_e/\mathbb{Q}_p n'étant pas galoisienne, il faut monter sur \mathbb{Q}_{p^2} et travailler avec l'extension K_e/\mathbb{Q}_{p^2} ; on utilise alors le lemme 4.6.

On note O'_{L_e} le sous-ensemble de O_{L_e} correspondant aux invariants $\beta \in O_{L_e}$ pour lesquels \mathcal{E}_β peut être définie sur \mathbb{Q}_p avec un défaut de semi-stabilité e et O''_{L_e} l'ensemble des classes d'isomorphisme de courbes elliptiques sur \mathbb{Q}_p qui prolongent un schéma \mathcal{E}_β avec un défaut de semi-stabilité e . L'ensemble O''_{L_e} consiste en la donnée d'un élément $\beta \in O'_{L_e}$ avec en plus celle d'une action prolongée de G sur $T_p(\mathcal{E}_\beta)$; on a bien sûr une flèche naturelle surjective $\lambda_e : O''_{L_e} \rightarrow O'_{L_e}$.

Proposition 4.8 *Soit $e \in \{3, 4, 6\}$ tel que $e \mid p+1$ et $e < p-1$. Soit \tilde{E}/\mathbb{F}_p supersingulière d'invariant modulaire $\tilde{j}(e)$ avec $\tilde{j}(3) = \tilde{j}(6) = 0$ et $\tilde{j}(4) = 1728$. On choisit un générateur du $\mathbb{Z}_p[\varphi]$ -module $\mathbf{M}(\tilde{E}(p))$ adapté au groupe d'automorphismes de \tilde{E} pour paramétrer les relèvements de \tilde{E} en un schéma elliptique sur O_{L_e} . Alors :*

- 1) $j(\mathcal{E}_\beta) = 0$ ou 1728 si et seulement si $\beta = 0$.
- 2) $O'_{L_e} = \mathbb{Z}_p\pi_e \cup \mathbb{Z}_p\pi_e^{e-3}$, de sorte que O'_{L_e} s'identifie à un sous- \mathbb{Z}_p -module de rang 1 de O_{L_e} si $e = 4$ et à $\mathbb{Z}_p \cup \mathbb{Z}_p$ si $e = 3$ ou 6.
- 3) O''_{L_e} s'identifie à $\mathbb{Z}_p \sqcup \mathbb{Z}_p$ (réunion disjointe) et les fibres de λ_e sont de cardinal 2 si $\beta = 0$ ou $e = 4$, de cardinal 1 sinon.

Preuve. Fixons un générateur e_1 du $\mathbb{Z}_p[\varphi]$ -module $M = \mathbf{M}(\tilde{E}(p))$ adapté au groupe d'automorphismes de \tilde{E} ; rappelons qu'alors $(e_1, \varphi(e_1) = e_2)$ est une base de M qui, après extension des scalaires à \mathbb{Z}_{p^2} , diagonalise l'action de $\xi_e = \mathbf{M}_{\mathbb{F}_{p^2}}([\zeta_e](p))$ (4.1.2). Soit $\beta \in O_{L_e}$; notons encore \mathcal{E}_β le schéma $\mathcal{E}_\beta \times_{O_{L_e}} O_{K_e}$ où O_{K_e} est l'anneau des entiers de K_e .

1) On a $j(\mathcal{E}_\beta) = 0$ (resp. 1728) si et seulement si $[\zeta_e] \in \text{Aut}_{\mathbb{F}_{p^2}}(\tilde{E})$ se relève dans $\text{Aut}_{O_{K_e}}(\mathcal{E}_\beta)$ avec $e = 3$ ou 6 (resp. $e = 4$), i.e. si et seulement si ξ_e stabilise après extension des scalaires la filtration $\mathcal{L}(\beta) \otimes_{O_{L_e}} O_{K_e} = (e_1 \otimes 1 + \beta \cdot e_2 \otimes \pi_e^{1-e})O_{K_e}$. Cette condition s'écrit $e_1 \otimes \zeta_e^\eta + \beta \cdot e_2 \otimes \zeta_e^{-\eta} \pi_e^{1-e} \in \mathcal{L}(\beta) \otimes_{O_{L_e}} O_{K_e}$ avec $\eta = \pm 1$, ce qui équivaut à $\beta = 0$.

2) D'après le théorème 4.5 et le lemme 4.6, la courbe \mathcal{E}_β est définie sur \mathbb{Q}_p avec un défaut de semi-stabilité e si et seulement si l'action de G_{K_e} sur $T_p(\mathcal{E}_\beta)$ s'étend en une action de G , dont la restriction à $G_{\mathbb{Q}_{p^2}}$ induit une injection $\langle \tau_e \rangle \hookrightarrow \text{Aut}_{\mathbf{MD}_{\mathbb{F}_{p^2}}}(M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_{p^2})$ préservant la

filtration et provenant d'une injection $\langle \tau_e \rangle \hookrightarrow \text{Aut}_{\mathbb{F}_{p^2}}(\tilde{E})$. Cette dernière condition équivaut à $\tau_e = \xi_e$ ou ξ_e^{-1} , d'où $\tau_e e_1 = \zeta_e^\epsilon e_1$ et $\tau_e e_2 = \zeta_e^{-\epsilon} e_2$ avec $\epsilon \in \{\pm 1\}$. Maintenant écrivons que l'action de G_{K_e/\mathbb{Q}_p} étendue par semi-linéarité stabilise $\mathcal{L}(\beta) \otimes_{O_{L_e}} O_{K_e}$. C'est automatique en ce qui concerne ω , puisque $\beta \in O_{L_e}$ (\mathcal{E}_β est déjà définie sur O_{L_e}); pour τ_e cela équivaut à $\tau_e(\pi_e^{-2\epsilon+1}\beta) = \pi_e^{-2\epsilon+1}\beta$, c'est-à-dire $\pi_e^{-2\epsilon+1}\beta \in \mathbb{Q}_{p^2} \cap L_e = \mathbb{Q}_p$. Finalement, comme $\beta \in O_{L_e}$, on obtient : pour $\epsilon = 1$, $\beta \in \mathbb{Z}_p\pi_e$; pour $\epsilon = -1$, $\beta \in \mathbb{Z}_p\pi_e^{e-3}$.

3) Cela découle de l'assertion d'unicité du théorème 4.5. Si $e \in \{3, 6\}$ alors $\mathbb{Z}_p\pi_e \cap \mathbb{Z}_p\pi_e^{e-3} =$

$\{0\}$; pour $\beta \in \mathbb{Z}_p \pi_e \setminus \{0\}$ (resp. $\beta \in \mathbb{Z}_p \pi_e^{e-3} \setminus \{0\}$) fixé, il y a, à \mathbb{Q}_p -isomorphisme près, une seule courbe prolongeant \mathcal{E}_β sur \mathbb{Q}_p avec un défaut de semi-stabilité égal à e et elle correspond à une action prolongée de τ_e avec $\epsilon = 1$ (resp. $\epsilon = -1$). Si $e = 4$ ou $\beta = 0$ il y en a deux, l'une correspondant à une action prolongée avec $\epsilon = 1$, l'autre avec $\epsilon = -1$. \square

Remarque 4.9 Si $e = 3$ (resp. $e = 6$), le schéma \mathcal{E}_0 se prolonge aussi en un schéma elliptique \mathcal{A}_0 sur \mathbb{Z}_p ; comme $j(\mathcal{A}_0) = 0$ les deux courbes prolongeant \mathcal{E}_0 sur \mathbb{Q}_p avec un défaut de semi-stabilité 3 (resp. 6) sont les tordues de $\mathcal{A}_0 \times_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p = \mathcal{A}_0$ correspondant aux éléments p^4 et p^2 (resp. $(-p)^5$ et $(-p)$) de $\mathbb{Q}_p^\times / (\mathbb{Q}_p^\times)^6 \simeq \text{Twist}((\mathcal{A}_0, \mathbf{0}), \mathbb{Q}_p)$. Si $e = 4$, le schéma \mathcal{E}_0 se prolonge aussi en un schéma elliptique \mathcal{B}_0 sur \mathbb{Z}_p ; comme $j(\mathcal{B}_0) = 1728$ les deux courbes prolongeant \mathcal{E}_0 sur \mathbb{Q}_p avec un défaut de semi-stabilité 4 sont les tordues de $\mathcal{B}_0 \times_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p = \mathcal{B}_0$ correspondant aux éléments $(-p)^3$ et $(-p)$ de $\mathbb{Q}_p^\times / (\mathbb{Q}_p^\times)^4 \simeq \text{Twist}((\mathcal{B}_0, \mathbf{0}), \mathbb{Q}_p)$. Pour tous ces cas voir les exemples donnés en 5.2.2.

On note $E_{\alpha, \epsilon}$ les courbes elliptiques sur \mathbb{Q}_p correspondant aux éléments de O_{L_e}'' , où $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ et $\epsilon \in \{\pm 1\}$ sont tels que $E_{\alpha, \epsilon} \times_{\mathbb{Q}_p} L_e \simeq \mathcal{E}_\beta \times_{O_{L_e}} L_e$ avec $\beta = \alpha \pi_e$ et une action étendue avec $\epsilon = 1$ ou bien $\beta = \alpha \pi_e^{e-3}$ et une action étendue avec $\epsilon = -1$.

Remarque 4.10 Si $\alpha \in \mathbb{Z}_p^\times$ le morphisme φ de M envoie, après extension des scalaires, $\mathcal{L}(\alpha \pi_e^{e-3})$ dans $\mathcal{L}(\alpha^{-1} \pi_e)$; comme il provient d'un morphisme de \tilde{E} , à savoir le Frobenius, on en déduit que les schémas $\mathcal{E}_{\alpha^{-1} \pi_e}$ et $\mathcal{E}_{\alpha \pi_e^{e-3}}$ sont O_{L_e} -isogènes. De plus, on vérifie que le morphisme $\varphi : \mathbf{D}_{cris, K_e}^*(V_p(E_{\alpha, -1})) = D_1 \rightarrow D_2 = \mathbf{D}_{cris, K_e}^*(V_p(E_{\alpha^{-1}, 1}))$ d'objets de $\mathbf{MF}_{K_e}(\varphi)$ commute à l'action de G_{K_e/\mathbb{Q}_p} , de sorte que c'est un morphisme dans $\mathbf{MF}_{K_e/\mathbb{Q}_p}(\varphi)$. L'injection

$$\text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(E_{\alpha^{-1}, 1}, E_{\alpha, -1}) \hookrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Q}_p[G]}(V_p(E_{\alpha^{-1}, 1}), V_p(E_{\alpha, -1})) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{MF}_{K_e/\mathbb{Q}_p}(\varphi)}(D_1, D_2)$$

montre que cette O_{L_e} -isogénie est définie sur \mathbb{Q}_p . Donc les courbes $E_{\alpha^{-1}, 1}$ et $E_{\alpha, -1}$ sont \mathbb{Q}_p -isogènes.

Remarque 4.11 (i) Soit \tilde{E}'/\mathbb{F}_p la tordue de \tilde{E} sur \mathbb{F}_{p^2} et, pour tout $\beta \in O_{L_e}$, soit $\mathcal{E}'_\beta/O_{L_e}$ le schéma obtenu en tordant \mathcal{E}_β sur K_e . Alors les relèvements de \tilde{E}' en un schéma elliptique sur O_{L_e} sont, à isomorphisme près, les \mathcal{E}'_β . De plus, \mathcal{E}'_β est définie sur \mathbb{Q}_p avec un défaut de semi-stabilité e si et seulement si \mathcal{E}_β l'est; les courbes sur \mathbb{Q}_p obtenues à partir de \tilde{E}' sont les tordues sur \mathbb{Q}_{p^2} de celles obtenues à partir de \tilde{E} .

(ii) Si $(e, p) = (6, 5)$ on se ramène à la situation $(e, p) = (3, 5)$ en tordant sur l'extension quadratique $\mathbb{Q}_5(\pi_2)/\mathbb{Q}_5$. En effet, si E/\mathbb{Q}_p a potentiellement bonne réduction avec $\text{dst}(E) = 6$, alors sa tordue E'/\mathbb{Q}_p sur $\mathbb{Q}_p(\pi_2)$ est telle que $\text{dst}(E') = 3$, et vice versa (et, sur $\mathbb{Q}_p(\pi_6)$, elles ont la même fibre spéciale).

On obtient ainsi toutes les courbes elliptiques sur \mathbb{Q}_p , à \mathbb{Q}_p -isomorphisme près, qui sont potentiellement supersingulières avec un défaut de semi-stabilité $e \in \{3, 4, 6\}$.

Remarque 4.12 Soit $\gamma : \tilde{E} \rightarrow \tilde{E}'$ un isomorphisme défini sur \mathbb{F}_{p^2} ; via l'isomorphisme $\text{End}_{\mathbb{F}_{p^2}}(\tilde{E}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{F}_{p^2}}(\tilde{E}, \tilde{E}')$ donné par $\psi \mapsto \gamma \circ \psi$, les éléments de $\text{Hom}_{\mathbb{F}_p}(\tilde{E}, \tilde{E}')$ correspondent aux $\psi \in \text{End}_{\mathbb{F}_{p^2}}(\tilde{E})$ tels que $\psi^\sigma = -\psi$, où σ est le Frobenius absolu. Soit $\psi_e = [\zeta_e] - [\zeta_e^{-1}] \in \text{End}_{\mathbb{F}_{p^2}}(\tilde{E})$. Comme $\psi_e^\sigma = -\psi_e$ l'isogénie $\gamma \circ \psi_e$ est définie sur \mathbb{F}_p , d'où un morphisme $\mathbf{M}(\gamma \circ \psi_e) = \mathbf{M}_{\mathbb{F}_{p^2}}(\psi_e) \circ \mathbf{M}_{\mathbb{F}_{p^2}}(\gamma) : \mathbf{M}(\tilde{E}'(p)) \rightarrow \mathbf{M}(\tilde{E}(p))$. Du fait que $\mathbf{M}_{\mathbb{F}_{p^2}}(\psi_e)$ envoie, après extension des scalaires, $\mathcal{L}(\beta)$ dans $\mathcal{L}(-\beta)$, on déduit que $\gamma \circ \psi_e$ se relève en une O_{L_e} -isogénie $(\gamma \circ \psi_e)_\beta : \mathcal{E}_\beta \rightarrow \mathcal{E}'_{-\beta}$ pour tout $\beta \in O_{L_e}$. Lorsque $\beta \in O_{L_e}'$ et pour une action

étendue avec le même invariant ϵ , on vérifie que le morphisme associé à $(\gamma \circ \psi_e)_\beta$ sur les objets de $\mathbf{MF}_{K_e}(\varphi)$ correspondants commute à l'action de G_{K_e/\mathbb{Q}_p} . Donc, si pour tous $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ et $\epsilon \in \{\pm 1\}$ on note $E'_{\alpha,\epsilon}$ la tordue sur \mathbb{Q}_{p^2} de $E_{\alpha,\epsilon}$, on obtient que les courbes $E_{\alpha,\epsilon}$ et $E'_{-\alpha,\epsilon}$ sont \mathbb{Q}_p -isogènes.

4.5 Sur les cas ordinaires

Si \tilde{E}/\mathbb{F}_p est ordinaire on a $a_p(\tilde{E}) \in \mathbb{Z}_p^\times$ et il existe une base (e_1, e_2) de $\mathbf{M}(\tilde{E}(p))$ qui diagonalise φ . Si e_1 est un vecteur propre dont la valeur propre est une unité, les relèvements de $\mathbf{M}(\tilde{E}(p))$ en un module de Dieudonné sur O_{L_e} correspondent bijectivement aux filtrations $\mathcal{L}(\beta) = (\beta \cdot e_1 \otimes \pi_e^{1-e} + e_2 \otimes 1)O_{L_e}$ avec $\beta \in O_{L_e}$. On obtient avec des méthodes tout à fait similaires les résultats qui suivent.

Proposition 4.13 *Soit $e < p - 1$. Soit \tilde{E}/\mathbb{F}_p une courbe elliptique ordinaire d'invariant modulaire \tilde{j} ; on pose $m(\tilde{j}) = 1$ si $\tilde{j} \notin \{0, 1728\}$, $m(1728) = 2$ et $m(0) = 3$. Via le choix d'une \mathbb{Z}_p -base de diagonalisation de φ dans $\mathbf{M}(\tilde{E}(p))$, l'association*

$$\begin{cases} \mathcal{C}_{O_{L_e}}(\tilde{E}) & \rightarrow O_{L_e} \\ (\tilde{E}, \Gamma, \nu) & \mapsto \beta \text{ tel que } \mathcal{L}(\beta) = \mathbf{M}(\nu)_{L_e}(\mathcal{L}(\Gamma)) \end{cases}$$

induit une bijection entre les classes d'isomorphisme dans $\mathcal{C}_{O_{L_e}}(\tilde{E})$ et l'ensemble O_{L_e}/\sim , avec $x \sim y$ si et seulement si $x^{m(\tilde{j})} = y^{m(\tilde{j})}$.

En composant avec le foncteur **ST** on obtient une bijection entre les classes d'isomorphisme dans $\mathcal{SE}_{O_{L_e}}(\tilde{E})$ et O_{L_e}/\sim . Le choix d'une autre \mathbb{Z}_p -base de diagonalisation de φ dans $\mathbf{M}(\tilde{E}(p))$ change l'invariant β en $\eta\beta$ avec $\eta \in \mathbb{Z}_p^\times$. Quand $\tilde{j} \in \{0, 1728\}$ ces classes sont paramétrées par un quotient de O_{L_e} parce que, contrairement au cas supersingulier, le groupe des \mathbb{F}_p -automorphismes de \tilde{E} est alors strictement plus grand que $\{\pm 1\}$.

Signalons que les relèvements d'une courbe elliptique ordinaire ont déjà été étudiés : voir par exemple [Me], Appendix (en particulier la prop.3.2.), où les méthodes utilisées n'imposent pas de restriction sur la ramification.

Pour tout $\beta \in O_{L_e}/\sim$ on note \mathcal{E}_β le schéma elliptique sur O_{L_e} qui correspond par **ST** à un triplet isomorphe dans $\mathcal{C}_{O_{L_e}}$ à un $(\tilde{E}, J_\beta, \nu_\beta)$ avec $\mathbf{M}(\nu_\beta)_{L_e}(\mathcal{L}(J_\beta)) = \mathcal{L}(\beta) \subset \mathcal{M}$. Le lemme 4.1 implique que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\beta = 0$
- (ii) le Frobenius de \tilde{E} se relève en un morphisme de \mathcal{E}_β
- (iii) si $j(\tilde{E}) = 0$ ou 1728 alors $j(\mathcal{E}_\beta) = 0$ ou 1728
- (iv) la suite exacte $(*_ord)$ associée à \mathcal{E}_β est scindée (cf. 1.3.1).

Donc \mathcal{E}_0/O_{L_e} est le relèvement canonique de \tilde{E} (cf. [Me], App., cor.1.2 et 1.3).

Remarque 4.14 Soient \tilde{E}/\mathbb{F}_p et \tilde{E}'/\mathbb{F}_p deux courbes elliptiques ordinaires; soient \mathcal{E}_0/O_{L_e} et \mathcal{E}'_0/O_{L_e} les relèvements canoniques de \tilde{E} et \tilde{E}' respectivement. Alors $\text{Hom}_{O_{L_e}}(\mathcal{E}_0, \mathcal{E}'_0) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{F}_p}(\tilde{E}, \tilde{E}')$, i.e. toute \mathbb{F}_p -isogénie $\tilde{E} \rightarrow \tilde{E}'$ se relève en une O_{L_e} -isogénie $\mathcal{E}_0 \rightarrow \mathcal{E}'_0$.

Remarque 4.15 Soient $\beta, \beta' \in O_{L_e}$ tels que $\beta\beta' \neq 0$ et soit $\psi : (\mathbf{M}(\tilde{E}(p)), \mathcal{L}(\beta)) \rightarrow (\mathbf{M}(\tilde{E}(p)), \mathcal{L}(\beta'))$ un morphisme de modules de Dieudonné filtrés. Dans une base de $\mathbf{M}(\tilde{E}(p))$ qui diagonalise φ , la matrice de ψ est de la forme $\text{Diag}(a, d)$ avec $a, d \in \mathbb{Z}_p$ tels que $a\beta = d\beta'$.

Si ψ provient d'un élément de $\text{End}_{\mathbb{F}_p}(\tilde{E})$ son polynôme caractéristique est dans $\mathbb{Q}[X]$, d'où $[\mathbb{Q}(a, d) : \mathbb{Q}] \leq 2$. Prenons $\beta = \alpha\pi_e^i$ et $\beta' = \alpha'\pi_e^i$ avec $i \in \mathbb{N}$, $\alpha' \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et $\alpha \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ tel que $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] > 2$; alors les schémas \mathcal{E}_β et $\mathcal{E}_{\beta'}$ ne sont pas O_{L_e} -isogènes.

Soit $e \in \{3, 4, 6\}$ tel que $e < p - 1$. On prend maintenant \tilde{E}/\mathbb{F}_p ordinaire d'invariant modulaire $\tilde{j}(e)$ avec $\tilde{j}(3) = \tilde{j}(6) = 0$ et $\tilde{j}(4) = 1728$; dans ce cas $e \mid p - 1$, $[\zeta_e] \in \text{Aut}_{\mathbb{F}_p}(\tilde{E})$ et cet automorphisme commute avec le Frobenius. Pour satisfaire la condition $e < p - 1$ il faut écarter les valeurs $(e, p) = (4, 5)$ et $(e, p) = (6, 7)$. En appliquant le théorème 4.5 on trouve que \mathcal{E}_β est définie sur \mathbb{Q}_p avec un défaut de semi-stabilité e si et seulement si $\beta \in \mathbb{Z}_p\pi_e^{e-3}$ (correspondant à une action étendue par $\tau_e = \xi_e$) ou bien $\beta \in \mathbb{Z}_p\pi_e$ (correspondant à une action étendue par $\tau_e = \xi_e^{-1}$).

Remarque 4.16 (i) Si $(e, p) = (6, 7)$ on se ramène à la situation $(e, p) = (3, 7)$ en tordant sur $\mathbb{Q}_7(\pi_2)$, cf. rmq. 4.11(ii).

(ii) Par contre, si le défaut de semi-stabilité d'une courbe elliptique est 4, il reste inchangé par torsion quadratique. Donc si $(e, p) = (4, 5)$ nos méthodes ne s'appliquent pas (du moins pas avec l'utilisation des modules de Dieudonné filtrés). Dans ce cas nous faisons appel à [Me], Appendix; en particulier, la prop. 3.3 que l'on y trouve permet de déduire les analogues des remarques 4.14 et 4.15 ci-dessus.

Remarque 4.17 Soient \tilde{E}/\mathbb{F}_p et \tilde{E}'/\mathbb{F}_p deux courbes elliptiques ordinaires qui sont \mathbb{F}_p -isogènes, c'est-à-dire telles que $a_p(\tilde{E}) = a_p(\tilde{E}')$. Soient $\beta, \beta' \in O_{L_e}$ tels que $\beta, \beta' \in \mathbb{Z}_p\pi_e^{e-3}$ ou bien $\beta, \beta' \in \mathbb{Z}_p\pi_e$; notons $\mathcal{E}_\beta/O_{L_e}$ et $\mathcal{E}'_{\beta'}/O_{L_e}$ les schémas elliptiques relevant \tilde{E} et \tilde{E}' respectivement, ainsi que $E_{\beta, \epsilon}/\mathbb{Q}_p$ et $E'_{\beta', \epsilon}/\mathbb{Q}_p$ les courbes qui les prolongent avec le même invariant $\epsilon \in \{\pm 1\}$. Du fait que tout morphisme commutant avec les Frobenii commute avec τ_e dans les $(\varphi, G_{K_e/\mathbb{Q}_p})$ -modules filtrés associés, on déduit que $\text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(E_{\beta, \epsilon}, E'_{\beta', \epsilon}) \simeq \text{Hom}_{O_{L_e}}(\mathcal{E}_\beta, \mathcal{E}'_{\beta'})$, i.e. toute O_{L_e} -isogénie $\mathcal{E}_\beta \rightarrow \mathcal{E}'_{\beta'}$ se prolonge en une \mathbb{Q}_p -isogénie $E_{\beta, \epsilon} \rightarrow E'_{\beta', \epsilon}$. En particulier, les courbes $E_{0, \epsilon}$ et $E'_{0, \epsilon}$ sont \mathbb{Q}_p -isogènes.

5 Les $\mathbb{Q}_p[G]$ -modules provenant d'une courbe elliptique sur \mathbb{Q}_p

5.1 Résultat et conséquences

Nous allons maintenant donner des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une représentation p -adique V_p de G de dimension 2 provienne d'une courbe elliptique sur \mathbb{Q}_p , i.e. pour qu'il existe E/\mathbb{Q}_p telle que $V_p \simeq V_p(E)$ en tant que $\mathbb{Q}_p[G]$ -modules.

Soit E/\mathbb{Q}_p une courbe elliptique. Tout d'abord, on sait que la représentation $V_p(E)$ est potentiellement semi-stable. Ensuite, la représentation de Weil-Deligne $\mathbf{W}_p^*(V_p(E))$ associée à $V_p(E)$ vérifie les conditions (1°), (2°) et (3°) du théorème 3.1 (compatibilité). Enfin, on sait que $\mathbf{D}_{pst}^*(V_p(E))$ est de type Hodge-Tate $(0, 1)$; on dira que $V_p(E)$ est de type Hodge-Tate $(0, 1)$, le foncteur \mathbf{D}_{pst}^* étant sous-entendu.

Là encore, le résultat est que ces conditions nécessaires sont aussi suffisantes : d'une part les (φ, N, G) -modules filtrés faiblement admissibles vérifiant ces conditions sont exactement ceux de la liste \mathbf{D}^* , et d'autre part tous les objets de cette liste proviennent d'une courbe elliptique sur \mathbb{Q}_p .

Théorème 5.1 Soit V_p une représentation p -adique de G de dimension 2. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (1) il existe une courbe elliptique E sur \mathbb{Q}_p telle que $V_p(E)$ soit isomorphe à V_p ,

- (2) V_p est potentiellement semi-stable de type Hodge-Tate $(0, 1)$ et $\mathbf{W}_p^*(V_p)$ vérifie les conditions (1°) , (2°) et (3°) du théorème 3.1,
- (3) V_p est potentiellement semi-stable et $\mathbf{D}_{pst}^*(V_p)$ est isomorphe à un objet de la liste \mathbf{D}^* .

Remarque 5.2 La condition (3°) , qui porte sur la représentation de Weil-Deligne associée à un objet D de $\mathbf{MF}_{K/\mathbb{Q}_p}(\varphi, N)$, se lit en prenant le polynôme caractéristique de φ sur le \mathbb{Q}_p -espace vectoriel formé des éléments de D qui sont fixes par l'action d'un relèvement du Frobenius absolu dans G_{K/\mathbb{Q}_p} .

Preuve. Les objets $D = \mathbf{D}_{pst}^*(V_p)$ obtenus avec les conditions de (2) sont exactement ceux de la liste \mathbf{D}^* : la représentation de Weil-Deligne associée à D se lit sur le $(\varphi, N, G_{K/\mathbb{Q}_p})$ -module $D^{(0)}$ obtenu en oubliant la filtration et la même preuve que celle du théorème 3.1 montre que $D^{(0)}$ est l'un des $(\varphi, N, G_{K/\mathbb{Q}_p})$ -modules déduits de la liste \mathbf{D}^* ; puis la filtration sur D_K est obtenue en écrivant que D est de type Hodge-Tate $(0, 1)$ et faiblement admissible, voir 2.2.4.

Pour les cas $\mathbf{D}_{\mathbf{m}}^*(\mathbf{e}; \mathbf{b}; \alpha)$ le résultat provient du fait que l'application de $p\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ dans \mathbb{Q}_p qui à q associe $\alpha(q) = -\log(u_q)/v_p(q)$ est surjective (où l'on a écrit $q = u_q p^{v_p(q)}$, cf. rmq. 2.9 ; $\log(u_q)$ parcourt $p\mathbb{Z}_p$ et $v_p(q)$ parcourt les entiers ≥ 1), ainsi que de la description des twists quadratiques donnée en 2.2.2.

Pour les cas $\mathbf{D}_{\mathbf{c}}^*(\mathbf{e}; \mathbf{a}_p; \alpha)$ et $\mathbf{D}_{\mathbf{pc}}^*(\mathbf{e}; \mathbf{a}_p; \epsilon; \alpha)$ le résultat provient du théorème 3.1 et du fait que pour toute courbe elliptique ordinaire sur \mathbb{F}_p il existe un relèvement tel que $(*_ord)$ est scindée (ce qui équivaut à $\alpha = 0$) ainsi qu'un relèvement tel que $(*_ord)$ n'est pas scindée (voir 4.5 et les exemples donnés en 5.2.1).

Pour les cas $\mathbf{D}_{\mathbf{c}}^*(\mathbf{e}; \mathbf{0})$ le résultat provient du théorème 3.1 (ici la filtration n'apporte pas de donnée supplémentaire).

Pour les cas $\mathbf{D}_{\mathbf{pc}}^*(\mathbf{e}; \mathbf{0}; \alpha)$, si $(e, p) = (6, 5)$ on se ramène à la situation $(e, p) = (3, 5)$ en tordant sur $\mathbb{Q}_5(\pi_2)$ (voir rmq. 4.11(ii)). Le résultat provient alors de l'étude faite en 4.4 dont on reprend les notations. Soient $E_{\alpha, \epsilon}$ les courbes elliptiques sur \mathbb{Q}_p correspondant aux éléments de O''_{L_e} avec $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ et $\epsilon \in \{\pm 1\}$. On a une application

$$\delta_e : O''_{L_e} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$$

qui à $E_{\alpha, \epsilon}$ associe l'unique $\delta_e(E_{\alpha, \epsilon}) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ tel que $\mathbf{D}_{cris, K_e/\mathbb{Q}_p}^*(V_p(E_{\alpha, \epsilon})) \simeq \mathbf{D}_{\mathbf{pc}}^*(\mathbf{e}; \mathbf{0}; \delta_e(E_{\alpha, \epsilon}))$ en tant que $(\varphi, G_{K_e/\mathbb{Q}_p})$ -modules filtrés. Un calcul montre alors que l'on a $\delta_e(E_{\alpha, \epsilon}) = -p\alpha^{-\epsilon}$; en particulier δ_e est surjective. \square

Remarque 5.3 L'étude faite en 4.4 montre que les fibres de δ_e sont finies : pour $\alpha \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ le cardinal de $\delta_e^{-1}(\alpha)$ est 4 si $v_p(\alpha) = 1$ et 2 sinon.

Remarque 5.4 De même que pour les cas $\ell \neq p$, un $\mathbb{Z}_p[G]$ -module T_p provient d'une courbe elliptique sur \mathbb{Q}_p si et seulement si le $\mathbb{Q}_p[G]$ -module $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} T_p$ provient d'une courbe elliptique sur \mathbb{Q}_p .

Corollaire 5.5 *Le nombre de classes d'isomorphisme d'objets de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G)$ provenant d'une courbe elliptique sur \mathbb{Q}_p ayant potentiellement bonne réduction est fini si et seulement si $p \equiv 1 \pmod{12}$; il vaut alors $8[2\sqrt{p}] + 66$.*

La première assertion provient du fait que les courbes E ayant potentiellement bonne réduction avec $\text{dst}(E) \geq 3$ sont toutes potentiellement ordinaires si et seulement si $p \equiv 1 \pmod{12}$ (et aussi bien sûr du théorème 5.1). Il y a alors : $2 \text{Card}(\mathcal{N}_p^\times) = 4[2\sqrt{p}]$ classes provenant de courbes elliptiques ayant bonne réduction ordinaire sur \mathbb{Q}_p et autant provenant d'un twist quadratique ramifié de telles ; 1 classe provenant de courbes ayant bonne réduction

supersingulière sur \mathbb{Q}_p et 1 provenant d'un twist quadratique ramifié de telles ; $4 \text{ Card}(\mathcal{N}_{p,3}^\times) = 24$ classes provenant de E/\mathbb{Q}_p potentiellement ordinaires avec $\text{dst}(E) = 3$; $4 \text{ Card}(\mathcal{N}_{p,4}^\times) = 16$ classes provenant de telles courbes avec $\text{dst}(E) = 4$; et $4 \text{ Card}(\mathcal{N}_{p,6}^\times) = 24$ classes provenant de telles courbes avec $\text{dst}(E) = 6$.

Enfin, la proposition qui suit est essentiellement une conséquence de l'étude des courbes sur \mathbb{Q}_p ayant potentiellement bonne réduction faite en 4.

Proposition 5.6 *Soit E/\mathbb{Q}_p une courbe elliptique. L'assertion :*

$$(*) \quad V_p(E) \text{ et } V_p(E') \text{ sont } \mathbb{Q}_p[G]\text{-isomorphes} \Leftrightarrow E \text{ et } E' \text{ sont } \mathbb{Q}_p\text{-isogènes}$$

est vraie si et seulement si on est dans l'un des trois cas suivants :

- (1) *E a potentiellement mauvaise réduction multiplicative*
- (2) *E a potentiellement bonne réduction supersingulière et $\text{dst}(E) \geq 3$*
- (3) *E est le relèvement canonique sur une extension finie de \mathbb{Q}_p d'une courbe ordinaire.*

Preuve. L'implication (1) \Rightarrow (*) provient pour des courbes de Tate de la remarque 2.10 et le cas général s'en déduit par torsion quadratique. L'implication (2) \Rightarrow (*) provient des remarques 4.10, 4.11 et 4.12. L'implication (3) \Rightarrow (*) provient de la remarque 4.14 pour $\text{dst}(E) = 1$ ou 2 et des remarques 4.17 et 4.16 pour $\text{dst}(E) \geq 3$. Enfin, les remarques 4.3 ainsi que 4.15 et 4.16 montrent que dans tous les autres cas l'assertion (*) est fausse. \square

5.2 Exemples

5.2.1 Courbes elliptiques potentiellement ordinaires

Si $4 \mid p-1$: on reprend les courbes \tilde{E}_j/\mathbb{F}_p et $E_{i,j}/\mathbb{Q}_p$ avec $1 \leq j \leq 4$ et $0 \leq i \leq 3$ considérées en 3.2.1. On a alors pour chaque j :

$$\begin{aligned} D_{pcris}^*(V_p(E_{0,j})) &\simeq D_c^*(1; \mathbf{a}_p, j; 0) & D_{pcris}^*(V_p(E_{1,j})) &\simeq D_{pc}^*(4; \mathbf{a}_p, j; 1; 0) \\ D_{pcris}^*(V_p(E_{2,j})) &\simeq D_c^*(2; \mathbf{a}_p, j; 0) & D_{pcris}^*(V_p(E_{3,j})) &\simeq D_{pc}^*(4; \mathbf{a}_p, j; -1; 0) \end{aligned}$$

On pose $E'_{i,j} : y^2 = x^3 + [u_j](-p)^i x + (-p)^{n(i)}$ pour $1 \leq j \leq 4$, $0 \leq i \leq 3$ et $n(i) = 1, 2, 4, 5$ si $i = 0, 1, 2, 3$ respectivement. Ce sont des courbes sur \mathbb{Q}_p d'invariant modulaire entier congru à 1728 modulo $p\mathbb{Z}_p$ mais différent de 1728 ; elles acquièrent bonne réduction sur $\mathbb{Q}_p(\pi_4)$ et la courbe réduite de $E'_{i,j}$ est \tilde{E}_j . On a alors pour chaque j :

$$\begin{aligned} D_{pcris}^*(V_p(E'_{0,j})) &\simeq D_c^*(1; \mathbf{a}_p, j; 1) & D_{pcris}^*(V_p(E'_{1,j})) &\simeq D_{pc}^*(4; \mathbf{a}_p, j; 1; 1) \\ D_{pcris}^*(V_p(E'_{2,j})) &\simeq D_c^*(2; \mathbf{a}_p, j; 1) & D_{pcris}^*(V_p(E'_{3,j})) &\simeq D_{pc}^*(4; \mathbf{a}_p, j; -1; 1) \end{aligned}$$

Si $3 \mid p-1$: on reprend les courbes $\tilde{\mathcal{E}}_j/\mathbb{F}_p$ et $\mathcal{E}_{i,j}/\mathbb{Q}_p$ avec $1 \leq j \leq 6$ et $0 \leq i \leq 5$ considérées en 3.2.1. On a alors pour chaque j :

$$\begin{aligned} D_{pcris}^*(V_p(\mathcal{E}_{0,j})) &\simeq D_c^*(1; \mathbf{a}_p, j; 0) & D_{pcris}^*(V_p(\mathcal{E}_{1,j})) &\simeq D_{pc}^*(6; \mathbf{a}_p, j; 1; 0) \\ D_{pcris}^*(V_p(\mathcal{E}_{2,j})) &\simeq D_{pc}^*(3; \mathbf{a}_p, j; 1; 0) & D_{pcris}^*(V_p(\mathcal{E}_{3,j})) &\simeq D_c^*(2; \mathbf{a}_p, j; 0) \\ D_{pcris}^*(V_p(\mathcal{E}_{4,j})) &\simeq D_{pc}^*(3; \mathbf{a}_p, j; -1; 0) & D_{pcris}^*(V_p(\mathcal{E}_{5,j})) &\simeq D_{pc}^*(6; \mathbf{a}_p, j; -1; 0) \end{aligned}$$

On pose $\mathcal{E}'_{i,j} : y^2 = x^3 + (-p)^{m(i)}x + [v_j](-p)^i$ pour $1 \leq j \leq 6$, $0 \leq i \leq 5$ et $m(i) = 1, 1, 2, 3, 3, 4$ si $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ respectivement. Ce sont des courbes sur \mathbb{Q}_p d'invariant modulaire entier congru à 0 modulo $p\mathbb{Z}_p$ mais non nul ; elles acquièrent bonne réduction sur $\mathbb{Q}_p(\pi_6)$

et la courbe réduite de $\mathcal{E}'_{i,j}$ est $\tilde{\mathcal{E}}_j$. On a alors pour chaque j :

$$\begin{array}{ll} \mathbf{D}_{pcris}^*(V_p(\mathcal{E}'_{0,j})) \simeq \mathbf{D}_{\mathbf{c}}^*(1; \mathbf{a}_{\mathbf{p},j}; 1) & \mathbf{D}_{pcris}^*(V_p(\mathcal{E}'_{1,j})) \simeq \mathbf{D}_{\mathbf{pc}}^*(6; \mathbf{a}_{\mathbf{p},j}; 1; 1) \\ \mathbf{D}_{pcris}^*(V_p(\mathcal{E}'_{2,j})) \simeq \mathbf{D}_{\mathbf{pc}}^*(3; \mathbf{a}_{\mathbf{p},j}; 1; 1) & \mathbf{D}_{pcris}^*(V_p(\mathcal{E}'_{3,j})) \simeq \mathbf{D}_{\mathbf{c}}^*(2; \mathbf{a}_{\mathbf{p},j}; 1) \\ \mathbf{D}_{pcris}^*(V_p(\mathcal{E}'_{4,j})) \simeq \mathbf{D}_{\mathbf{pc}}^*(3; \mathbf{a}_{\mathbf{p},j}; -1; 1) & \mathbf{D}_{pcris}^*(V_p(\mathcal{E}'_{5,j})) \simeq \mathbf{D}_{\mathbf{pc}}^*(6; \mathbf{a}_{\mathbf{p},j}; -1; 1) \end{array}$$

5.2.2 Courbes elliptiques potentiellement supersingulières

Si $4 \mid p+1$: on reprend les courbes E_i/\mathbb{Q}_p avec $0 \leq i \leq 3$ considérées en 3.2.2. On a alors :

$$\begin{array}{ll} \mathbf{D}_{pcris}^*(V_p(E_0)) \simeq \mathbf{D}_{\mathbf{c}}^*(1; 0) & \mathbf{D}_{pcris}^*(V_p(E_1)) \simeq \mathbf{D}_{\mathbf{pc}}^*(4; 0; \infty) \\ \mathbf{D}_{pcris}^*(V_p(E_2)) \simeq \mathbf{D}_{\mathbf{c}}^*(2; 0) & \mathbf{D}_{pcris}^*(V_p(E_3)) \simeq \mathbf{D}_{\mathbf{pc}}^*(4; 0; 0) \end{array}$$

Si $3 \mid p+1$: on reprend les courbes $\mathcal{E}_i/\mathbb{Q}_p$ avec $0 \leq i \leq 5$ considérées en 3.2.2. On a alors :

$$\begin{array}{ll} \mathbf{D}_{pcris}^*(V_p(\mathcal{E}_0)) \simeq \mathbf{D}_{\mathbf{c}}^*(1; 0) & \mathbf{D}_{pcris}^*(V_p(\mathcal{E}_1)) \simeq \mathbf{D}_{\mathbf{pc}}^*(6; 0; \infty) \\ \mathbf{D}_{pcris}^*(V_p(\mathcal{E}_2)) \simeq \mathbf{D}_{\mathbf{pc}}^*(3; 0; \infty) & \mathbf{D}_{pcris}^*(V_p(\mathcal{E}_3)) \simeq \mathbf{D}_{\mathbf{c}}^*(2; 0) \\ \mathbf{D}_{pcris}^*(V_p(\mathcal{E}_4)) \simeq \mathbf{D}_{\mathbf{pc}}^*(3; 0; 0) & \mathbf{D}_{pcris}^*(V_p(\mathcal{E}_5)) \simeq \mathbf{D}_{\mathbf{pc}}^*(6; 0; 0) \end{array}$$

Références

- [Co-Fo] *P. Colmez et J.-M. Fontaine*, Construction des représentations p -adiques semi-stables, *Invent. math.* **140**, 1 (2000), 1-43.
- [C-D-T] *B. Conrad, F. Diamond, and R. Taylor*, Modularity of certain potentially Barsotti-Tate Galois representations, *J. of the Am. Math. Soc.* **12**, 2 (1999), 521-567.
- [De 1] *P. Deligne*, Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L , in *Modular Functions of One Variable II*, *LNMA* **349**, Springer-Verlag (1973), 501-595.
- [De 2] *P. Deligne*, La conjecture de Weil II, *Publ. Math. IHES* **52** (1980), 137-252.
- [Fo 1] *J.-M. Fontaine*, Le corps des périodes p -adiques, exposé II, in *Périodes p -adiques*, *Astérisque* **223**, Soc. Math. de France (1994).
- [Fo 2] *J.-M. Fontaine*, Représentations p -adiques semi-stables, exposé III, in *Périodes p -adiques*, *Astérisque* **223**, Soc. Math. de France (1994).
- [Fo 3] *J.-M. Fontaine*, Représentations ℓ -adiques potentiellement semi-stables, exposé VIII, in *Périodes p -adiques*, *Astérisque* **223**, Soc. Math. de France (1994).
- [Fo 4] *J.-M. Fontaine*, Groupes p -divisibles sur les corps locaux, *Astérisque* **47-48**, Soc. Math. de France (1977).
- [Fo 5] *J.-M. Fontaine*, Sur certains types de représentations p -adiques du groupe de Galois d'un corps local ; construction d'un anneau de Barsotti-Tate, *Annals of Math.* **115** (1982), 529-577.
- [Fo-Ma] *J.-M. Fontaine and B. Mazur*, Geometric Galois Representations, in *Conference on Elliptic Curves and Modular Forms*, Hong Kong, December 18-21 (1995), 41-77.
- [Ho-Ta] *J. Tate*, Classes d'isogénie des variétés abéliennes sur un corps fini (d'après *T. Honda*), *Séminaire Bourbaki* **352** (1968), 15p.

- [Ka] *N. Katz*, Serre-Tate local moduli, in *Surfaces algébriques*, LNM **868**, Springer-Verlag (1981), 138-202.
- [Kr] *A. Kraus*, Détermination du poids et du conducteur associés aux représentations des points de p -torsion d'une courbe elliptique, *Diss. Math.* **364** (1997), 39p.
- [La] *S. Lang*, *Abelian Varieties*, Interscience Publishers (1959).
- [LS] *B. Le Stum*, La structure de Hyodo-Kato pour les courbes, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **94** (1995), 279-301.
- [Ma] *B. Mazur*, On monodromy invariants occuring in global arithmetic, and Fontaine's theory, in *p -adic Monodromy and the Birch and Swinnerton-Dyer Conjecture* (Boston, MA, 1991), *Contemp. Math.* **165** (1994), 1-20.
- [M-T-T] *B. Mazur, J. Tate, and J. Teitelbaum*, On p -adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer, *Invent. math.* **84** (1986), 1-48.
- [Me] *W. Messing*, The Crystals associated to Barsotti-Tate Groups : with Applications to Abelian Schemes, LNM **264**, Springer-Verlag (1972).
- [Ra] *M. Raynaud*, 1-Motifs et monodromie géométrique, exposé VII, in *Périodes p -adiques*, *Astérisque* **223**, Soc. Math. de France (1994).
- [Ro] *D.E. Rohrlich*, Elliptic Curves and the Weil-Deligne Group, CRM Proceedings and Lecture Notes **4** (1994).
- [Se 1] *J.-P. Serre*, *Abelian ℓ -adic representations and elliptic curves* (2nd ed.), Addison-Wesley (1989).
- [Se 2] *J.-P. Serre*, Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques, *Invent. math.* **15** (1972), 259-331.
- [Se-Ta] *J.-P. Serre and J. Tate*, Good reduction of abelian varieties, *Annals of Math.* **88** (1968), 492-517.
- [Si 1] *J.H. Silverman*, *The Arithmetic of Elliptic Curves*, GTM **106**, Springer-Verlag (1986).
- [Si 2] *J.H. Silverman*, *Advanced Topics in the Arithmetic of Elliptic Curves*, GTM **151**, Springer-Verlag (1994).
- [Ta] *J. Tate*, Endomorphisms of Abelian Varieties over Finite Fields, *Invent. math.* **2** (1966), 134-144.
- [Wa-Mi] *W.C. Waterhouse and J.S. Milne*, Abelian Varieties over Finite Fields, in *AMS Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* **XX** (1971), 53-64.
- [We] *A. Weil*, The Field of Definition of a Variety, *Am. J. of Math.* **78** (1956), 509-524.

Department of Mathematical Sciences, University of Durham, Durham DH1 3LE, England
 E-mail : maja.volkov@durham.ac.uk